本堂课主要内容

剪切对梁弯曲的影响

梁的复杂弯曲

§2-4 剪切对梁弯曲变形的影响

1、概述：

- 单跨梁弯曲微分方程推导时忽略剪切影响

平断面假设 → $EIv'' = M$ → $EIv^{(4)} = q$

↓

纯弯曲

（忽略剪力影响）

如何考虑剪力的影响?

- **精确计算**:弯曲微分方程式过程中考虑由于剪力的存在断面而发生的翘曲。这样推导较为复杂（弹性力学介绍）

- **剪力修正：**

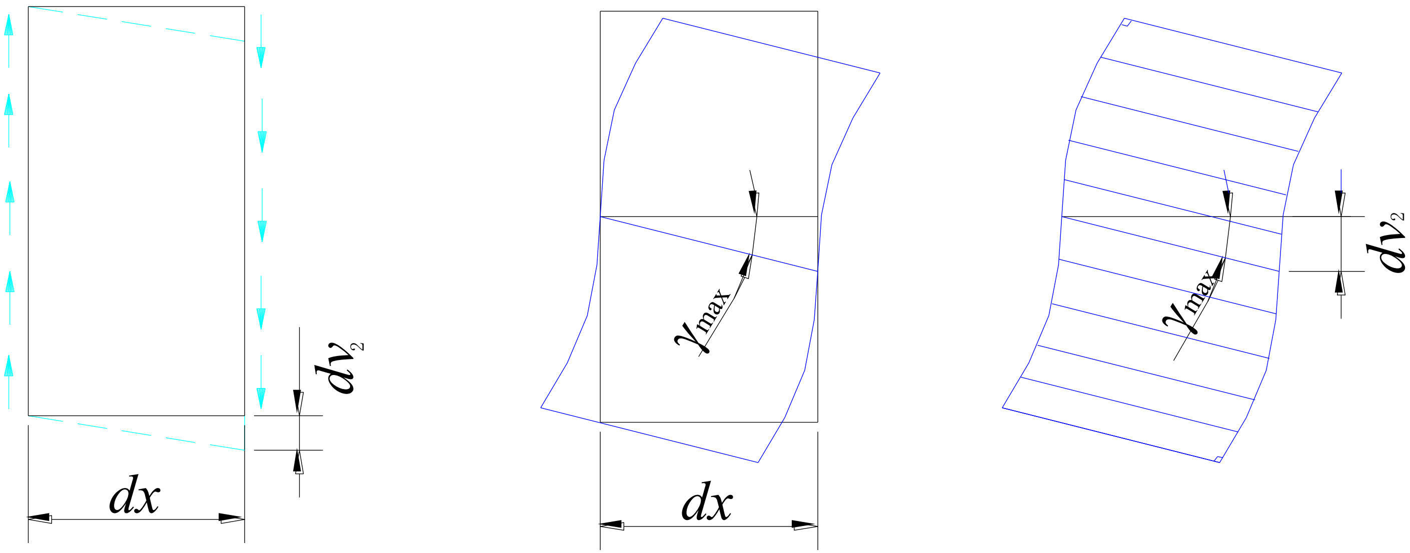
1、先按$EIv'' = M$ 求得 N，并单独考虑N 作用下产生的挠度 v_2 ；

2、按 $EIv^{(4)} = q$ 求出 v_1 ；

3、 $v = v_1 + v_2$

弯曲变形计算做一次剪切修正

2、剪切挠度 v_2



设中性轴处的剪切角为 γ_{max} 则有：$\dfrac{dv_2}{dx} = tg\gamma_{max} \approx \gamma_{max} = \dfrac{\tau_{max}}{G} = -\dfrac{N}{GA_S}$

式中：G——材料的剪切模量；

$A_S = \dfrac{N}{\tau_{max}}$ ——梁断面的“有效抗剪面积”。

3、剪切引起的挠度计算

（1）、建立 v_1 、v_2 之间的关系：

$$\frac{dv_2}{dx} = -\frac{N}{GA_S}$$

$$EIv'' = M$$

$$EIv''' = N$$

$$dv_2 = -\frac{EI}{GA_S} v_1''' \cdot dx$$

$$\boxed{v_2 = -\frac{EI}{GA_S} v_1'' + C_1} \tag{1}$$

（2）、求 v_1，设梁上受分布载荷 $q(x)$作用，积分得：

$$v_1 = \frac{1}{EI}\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x q\,dx^4 + \frac{Ax^3}{6EI} + \frac{Bx^2}{2EI} + Cx + D$$

$$\boxed{= f(x) + \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} + cx + d}$$

$$\Rightarrow v_1'' = f''(x) + ax + b$$

（3）、求 v_2

$$v_2 = -\frac{EI}{GA_S}\left[f''(x) + ax + b\right] + C_1 = -\frac{EI}{GA_S}\left[f''(x) + ax\right] + C_2$$

（4）总挠度（考虑剪切的总挠度公式）

$$v = v_1 + v_2$$

$$= \boxed{f(x) + \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} + cx + d} - \boxed{\frac{EI}{GA_S}\left[f''(x) + ax\right]}$$

式中：EI ——梁的弯曲刚度；

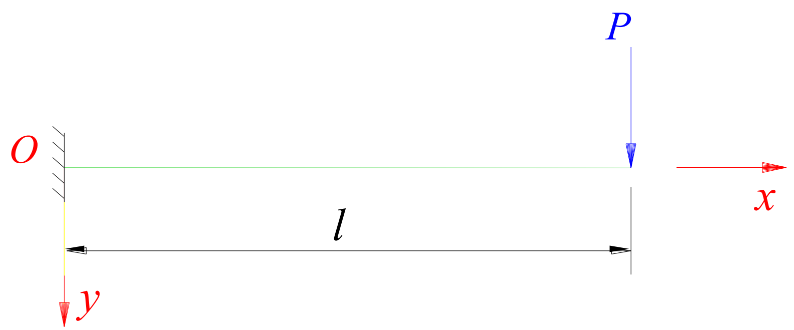
GA_S ——梁的剪切刚度；

a、b、c、d ——积分常数。

（5）、弯曲要素

- 总挠度：$v = v_1 + v_2 = f(x) + \dfrac{ax^3}{6} + \dfrac{bx^2}{2} + cx + d - \dfrac{EI}{GA_S}\left[f''(x) + ax\right]$
- 转角：$\theta = v_1' = f'(x) + \dfrac{ax^2}{2} + bx + c$
- 弯矩：$M = EIv_1'' = EI\left[f''(x) + ax + b\right]$
- 剪力：$N = EIv_1''' = EI\left[f'''(x) + a\right]$

例1：计算右图中在自由端受集中力作用的悬臂梁，考虑剪切的影响求挠度。



解：建立图示坐标系 ：

$$v = v_1 + v_2 = f(x) + \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} + cx + d - \frac{EI}{GA_S}\left[f''(x) + ax\right]$$

边界条件： $x = 0$处 $\begin{cases} v(0) = 0 \Rightarrow d = 0 \\ \theta(0) = v_1'(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \end{cases}$

$x = l$处 $\begin{cases} v_1''(l) = 0 \Rightarrow al + b = 0 \\ EIv'''(l) = -P_1 \Rightarrow EIa = -P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{P}{EI} \\ b = \dfrac{Pl}{EI} \end{cases}$

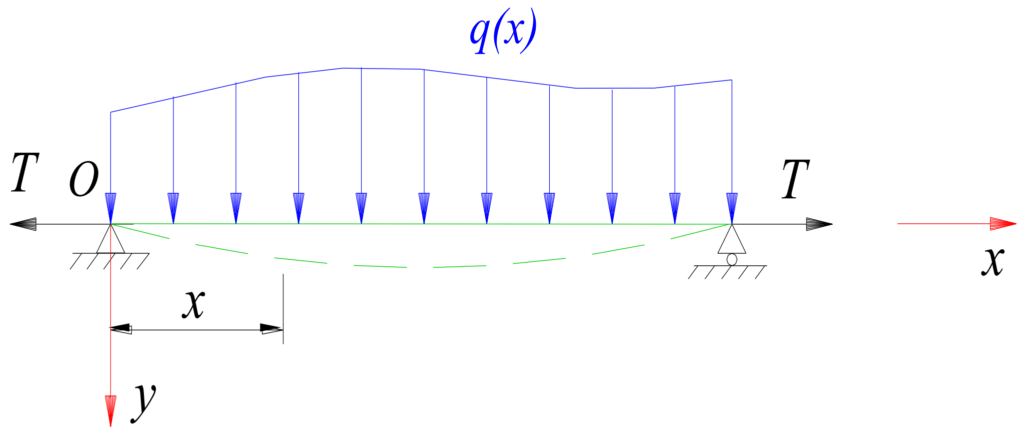
$$\therefore v(x) = -\frac{Px^3}{6EI} + \frac{Plx^2}{2EI} + \frac{Px}{GA_S} = \frac{Pl^3}{6EI}\left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right] + \frac{P}{GA_S}x$$

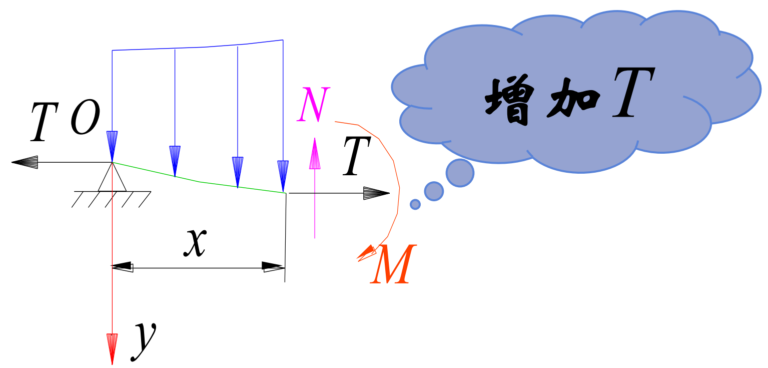
§2-5 梁的复杂弯曲

1、概念： 横向荷重、纵向荷重、复杂弯曲

2、微分方程：

- 坐标系
- 符号法则





微分方程式推导思路

静力平衡

平断面假定
小变形假设
胡克定律

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_O = 0$$

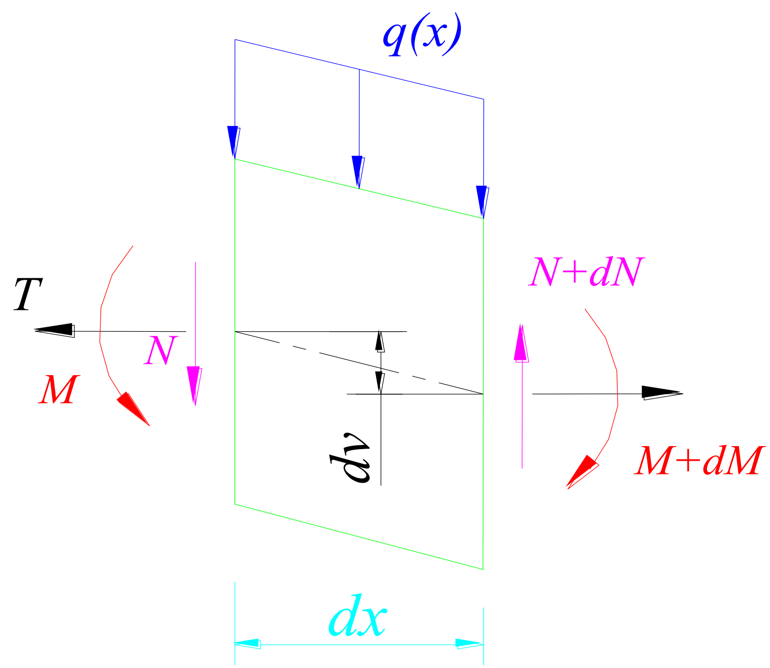
$$EIv'' = M$$

$$dN / dx = q$$

$$\frac{dM}{dx} = N + T\frac{dv}{dx}$$

$$T = const$$

$$EIv^{(4)} - Tv'' = q$$



复杂弯曲梁的弯曲微分方程为:

$$EIv^{(4)} - Tv'' = q(x)$$

——梁在复杂弯曲（轴向拉力）微分方程式

$$EIv^{(4)} + T^{*}v'' = q(x)$$

——梁在复杂弯曲（轴向压力）微分方程式

3、微分方程的解

$$\boxed{v = v_{通} + v_{特}}$$

3.1、轴向拉力情况：

（1）、齐次通解：

齐次方程为： $EIv^{(4)} - Tv'' = 0$ （3.1）

或 $v^{(4)} - k^2 v'' = 0$ （3.2）式中： $k^2 = T/EI$

特征方程为：

$$s^4 - k^2 s^2 = 0 \longrightarrow s_1 = s_2 = 0, s_3 = k, s_4 = -k$$

$$\therefore v = a_1 + a_2 x + a_3 e^{kx} + a_4 e^{-kx} \xrightarrow{e^{\pm kx} = chkx \pm shkx}$$

$$\therefore v = A_1 + A_2 kx + A_3 chkx + A_4 shkx \quad (3.3)$$

——齐次通解，式中： A_1、A_2、A_3、A_4 为四个积分常数

(2) 求特解：

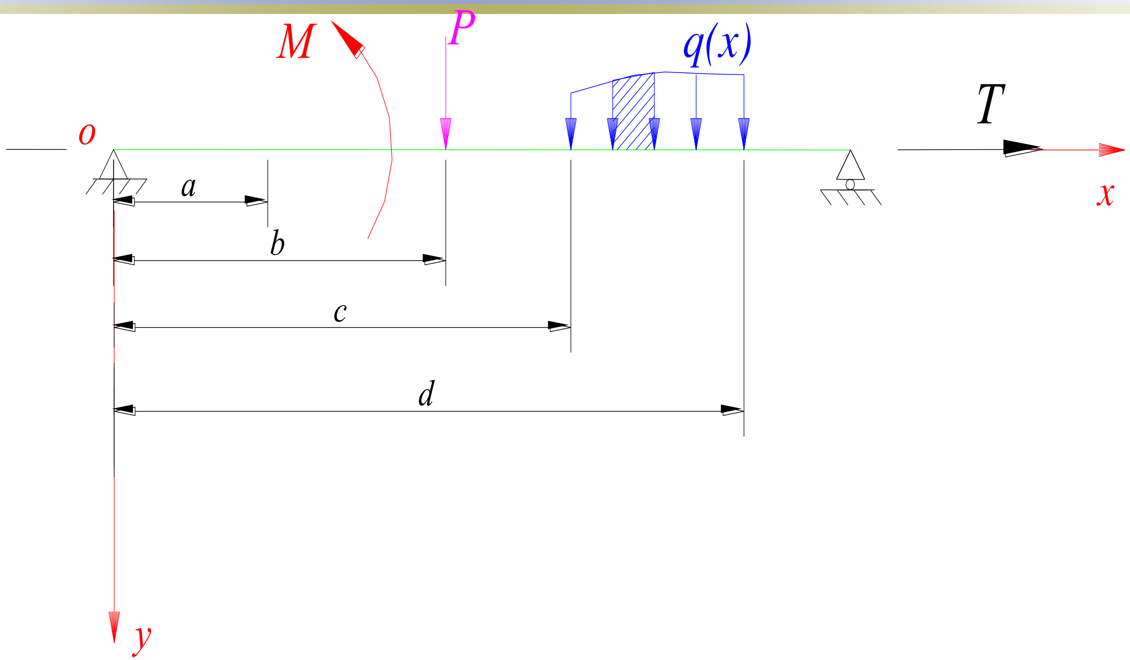
$$v' = A_2 k + A_3 k shkx + A_4 k chkx$$

$$v'' = A_3 k^2 chkx + A_4 k^2 shkx$$

$$v''' = A_3 k^3 shkx + A_4 k^3 chkx$$

设：v_0、θ_0、M_0、N_0 为式梁得四个初始弯曲要素，$x = 0$ 时：

$$\begin{cases} v = A_1 + A_3 = v_0 \\ v' = A_2 k + A_4 k = \theta_0 \\ EIv'' = EIA_3 k^2 = M_0 \\ EIv''' = EIA_4 k^3 = N_0 + Tv_0' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_1 = v_0 - \dfrac{M_0}{EIk^2} \\ A_2 = -\dfrac{N_0}{EIk^3} \\ A_3 = \dfrac{M_0}{EIk^2} \\ A_4 = \dfrac{\theta_0}{k} + \dfrac{N_0}{EIk^3} \end{cases}$$



$$v = v_0 + \frac{\theta_0}{k} shkx + \frac{M_0}{EIk^2}(chkx - 1) + \frac{N_0}{EIk^3}(shkx - kx) + \Big\|_a \frac{M}{EIk^2}\left[chk(x-a) - 1\right]$$

$$+ \Big\|_b \frac{P}{EIk^3}\left[sh(x-b) - k(x-b)\right] + \Big\|_c \int_0^x \frac{q(\xi)}{EIk^3}\left[shk(x-\xi) - k(x-\xi)\right]d\xi \qquad (3.4)$$

3.2、轴向压力情况：

公式中的 T 用 $-T^*$ 代替，或 k 用 ik^* 代替就可以了。

要注意到： $shik^*x = ishk^*x$

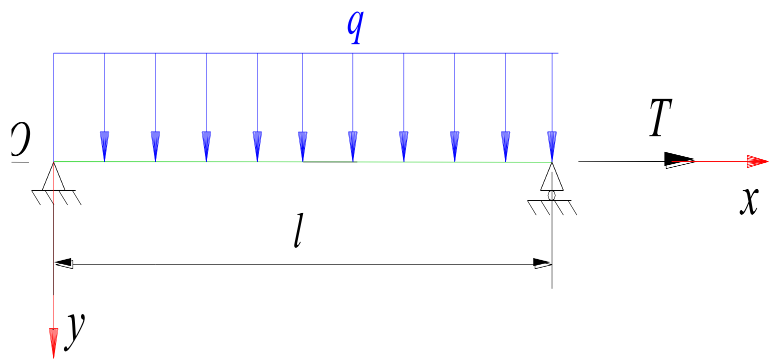
$chik^*x = chk^*x$

轴向压力时的挠曲线方程 ：

$$v = v_0 + \frac{\theta_0}{k^*} shk^*x + \frac{M_0}{EIk^{*2}}(1 - chk^*x) + \frac{N_0}{EIk^{*3}}(k^*x - shk^*x) + \|_a \frac{M}{EIk^{*2}}\left[1 - \cos k^*(x-a)\right]$$

$$+ \|_b \frac{P}{EIk^{*3}}\left[k^*(x-b) - shk^*(x-b)\right] + \|_c \int \frac{q(\xi)d\xi}{EIk^{*3}}\left[k^*(x-\xi) - shk^*(x-\xi)\right]$$

例2：受均布荷重，两端自由支持并受轴向拉力T作用的梁，计算其弯曲要素。



结合公式（3.4），根据边界条件，可以求出初始弯曲要素。将初始弯曲要素值代入公式（3.4）便可以得到挠度的表达式：

$$v = \frac{ql^4}{EI(2u)^4}\left[\frac{chu\left(1-\frac{2x}{l}\right)}{chu}\right] + \frac{ql^2x}{8EIu^2}(l-x)$$

弯曲要素：

$$v\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}f_0(u)$$

$$v'(0)=-v'(l)=\frac{ql^3}{24EI}\psi_0(u)$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right)=-\frac{ql^2}{8}\varphi_0(u)$$

式中：

$$\begin{cases} f_0(u)=\dfrac{24}{5u^4}\left(\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{1}{chu}-1\right) \\ \varphi_0(u)=\dfrac{2}{u^2}\left(1-\dfrac{1}{chu}\right) \\ \psi_0(u)=\dfrac{3}{u^3}(u-thu) \\ u=\dfrac{kl}{2}=\dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{T}{EI}} \end{cases}$$

性质：

（1）当 $T=0(u=0)$ 时 f_0、ψ_0、φ_0 均为1。——普通梁的公式

（2）当 $T>0(u>0)$ 时 f_0、ψ_0、φ_0 均小于1——轴向拉力使弯曲要素减小，弯曲程度改善，变相增加梁的刚度。

对于复杂梁弯曲的弯曲要素同样可以采用查表的方法得到，课本给出的附表B可以用于查复杂梁弯曲的弯曲要素，其中轴向拉伸和轴向压缩对应的辅助函数可以查附表B-3和B-4

本堂课小结：

- 剪切对梁弯曲的影响
- 复杂梁弯曲的挠度方程
- 复杂梁弯曲的弯曲要素

- 复习：本章内容
- 作业：2.7, 2.8, 2.9

本堂课小结

- 剪切对梁弯曲的影响；复杂梁弯曲；
- 方程推导、求解；
- 弯曲要素求解问题。

作业：

- 复习本章
- 课后习题：2.7，2.8， 2.9