



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主讲人：万德成

章节：第3章 流体运动学

内容：3.3 流体微团的运动形式



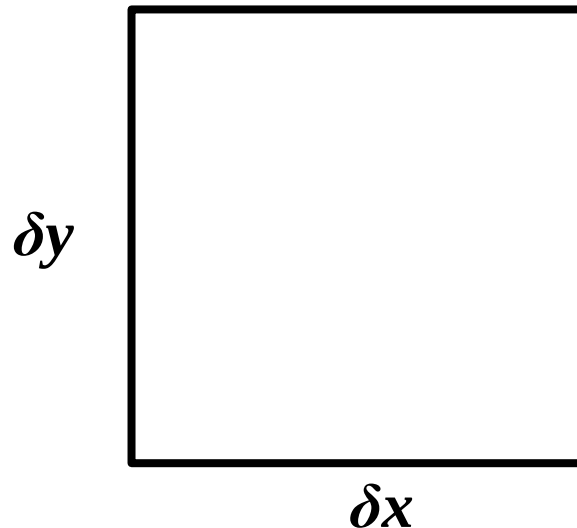
流体微团的运动形式

流体的易变形性和易流动性是区别于固体的重要性质

为了研究流体在运动中的变形，引入流体微团的概念：

它是由许多流体质点组成的微小流体团，这个微团不仅包含了流动速度、密度、压力等物理量，而且还具有一定的外形。

假设从流场中取出的流体微团是一个正方形：





流体微团的运动形式

理论力学中，**刚体**运动可分解为**平动**和**转动**两部分：

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_M + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$


$\mathbf{V}_M$ 参考点M的运动速度

$\mathbf{r}$ 动点到参考点M的矢径

$\boldsymbol{\omega}$ 旋转角速度

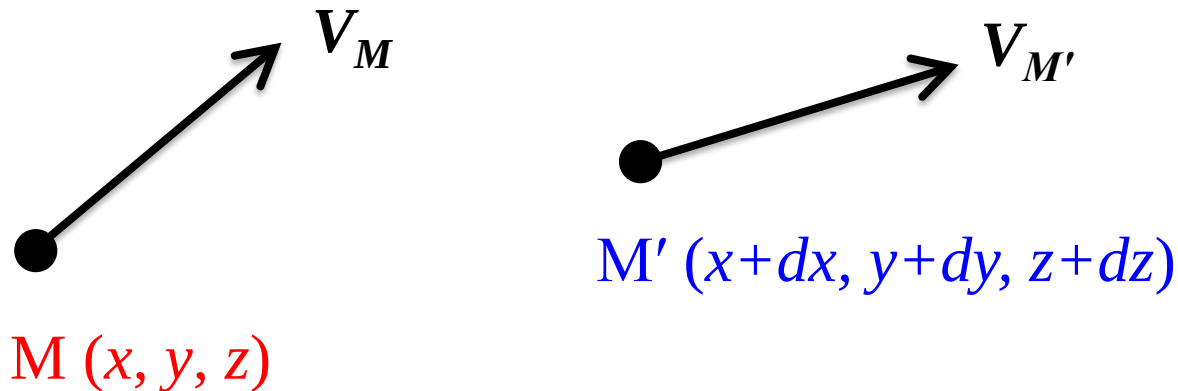


流体微团的运动形式

在流体力学中，为研究流体运动，在流场中取出一微团，微团上某点 $M(x, y, z)$ ，其邻近一点为 $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$ 。

两点间的矢径为： $dr = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$

设 M 处流体速度为 $V_M (u, v, w)$ ， M' 处流体速度为 $V_{M'}$





流体微团的运动形式

则点M'处流体速度 $\mathbf{V}_{M'}$ 可表示为:

$$\mathbf{V}_{M'} = \mathbf{V}_M + \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial z} \delta z + \dots$$

可改写为矢量形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{M'} &= \mathbf{V}_M + \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial z} \delta z + \dots \\ &= \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) \mathbf{i} + (\dots) \mathbf{j} + (\dots) \mathbf{k} \end{aligned}$$



流体微团的运动形式

对每个速度分量进行改写，以x方向的速度为例：

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{M'} &= \mathbf{V}_M + \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{V}_M}{\partial z} \delta z + \dots \\ &= \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) \mathbf{i} + (\dots) \mathbf{j} + (\dots) \mathbf{k} \\ &= \left[\underbrace{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz}_{(3)} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy}_{(4)} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz}_{(5)} \right] \mathbf{i} + (\dots) \mathbf{j} + (\dots) \mathbf{k} \end{aligned}$$

对比



流体微团的运动形式

可以用不同的符号表示每个项目：

$$(1) \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$(2) \quad \omega_z = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$(3) \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$(4) \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$(5) \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$



下面对各分项作出物理意义解释

$$(1) \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{的物理意义}$$



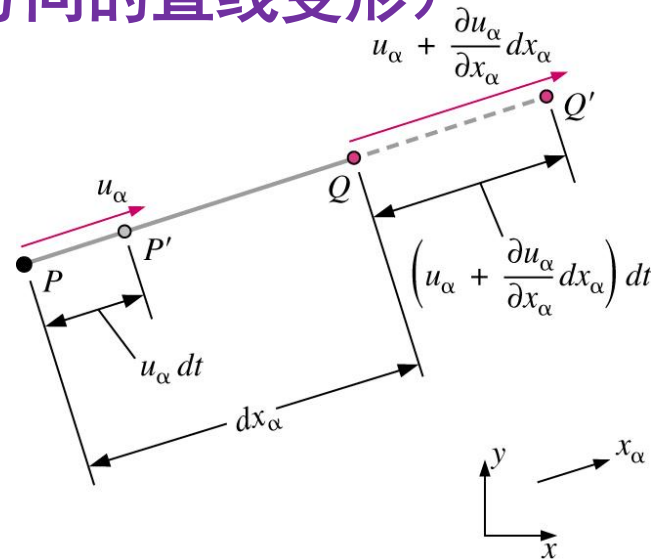
流体微团的运动形式

考虑x方向的直线变形

(为作一般化表达, 右图为任意方向 x_α 方向的直线变形)

x方向单位长度的伸长量:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} dx dt / dx = \frac{\partial u}{\partial x} dt$$



单位长度伸长速率: $\varepsilon_{xx} = \frac{\varepsilon_x}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}$

它表示流体微团在x方向上的伸长或缩短的快慢。



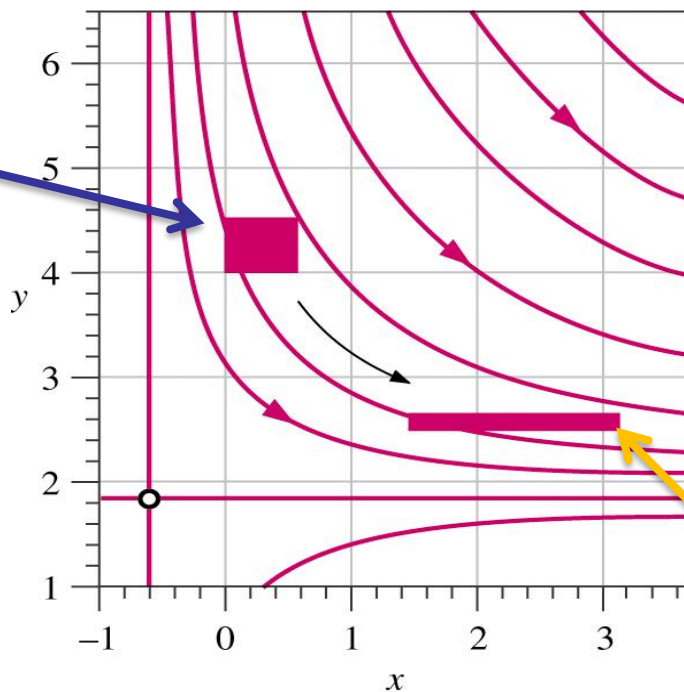
流体微团的运动形式

同样可得到： $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$

ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} 称为线变形速率。

观察某流体微团的线变形→

变形前



变形后



流体微团的运动形式

很显然有：

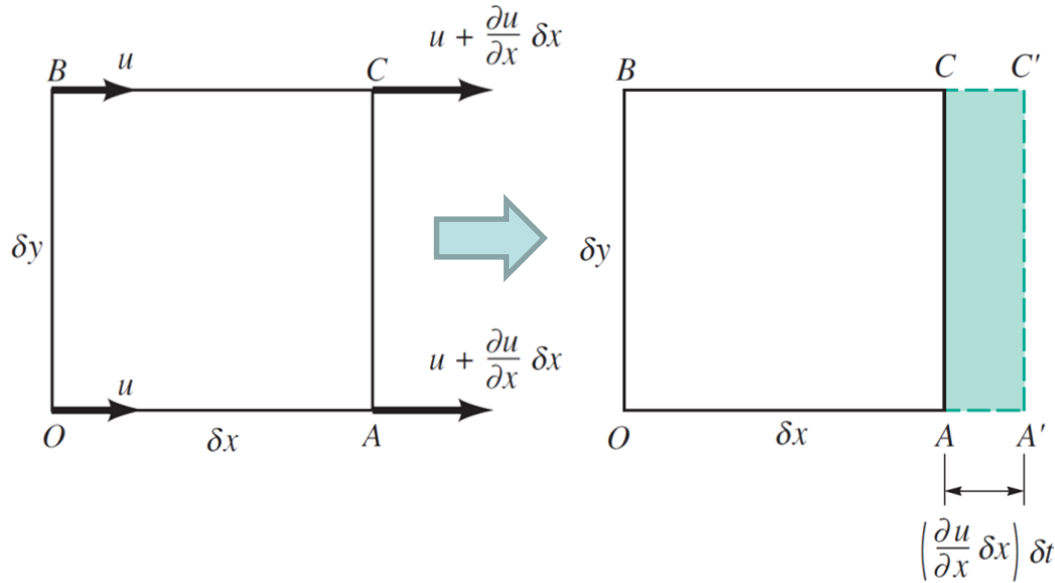
$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{V}$$

$\nabla \cdot \mathbf{V}$ 是速度的散度，表示流体微团单位体积单位时间的体积变化率

体积变化率还可通过以下推导得到



流体微团的运动形式



流体微团在x方向的**体积变化**:

$$\delta V_x = \left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \right) \delta y \cdot \delta z \cdot \delta t \right] - (u \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot \delta t) = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot \delta t$$

在x方向**单位体积单位时间**的体积变化:

$$\text{当 } \delta x, \delta t \rightarrow 0 \text{ 时} \quad \frac{\delta V_x}{V \cdot \delta t} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot \delta t}{\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot \delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}$$



流体微团的运动形式

同样可得在y和z方向单位体积单位时间的体积变化：

$$\text{当 } \delta y, \delta z, \delta t \rightarrow 0 \text{ 时} \quad \frac{\delta V_y}{V \cdot \delta t} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\delta V_z}{V \cdot \delta t} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

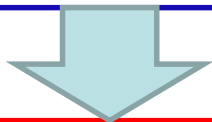


流体微团的运动形式

因此，单位体积单位时间的总体积变化：

$$\text{当 } \delta x, \delta y, \delta z, \delta t \rightarrow 0 \quad \frac{\delta \mathcal{V}}{\mathcal{V} \cdot \delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{V}$$

可用速度散度 $\nabla \cdot \mathbf{V}$ 表示流体体积变化率



$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{不可压缩流体}$$



流体微团的运动形式

$$\nabla \cdot \mathbf{V} > 0:$$

表示该流体微团不断有流体流出，称为源 (source)

$$\nabla \cdot \mathbf{V} < 0:$$

表示该流体微团不断吸收流体，称为汇 (sink)

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0:$$

不可压缩流体的速度场是一个无源场



流体微团的运动形式

(2) ε_{xy} , ε_{xz} , ε_{zy} 的物理意义

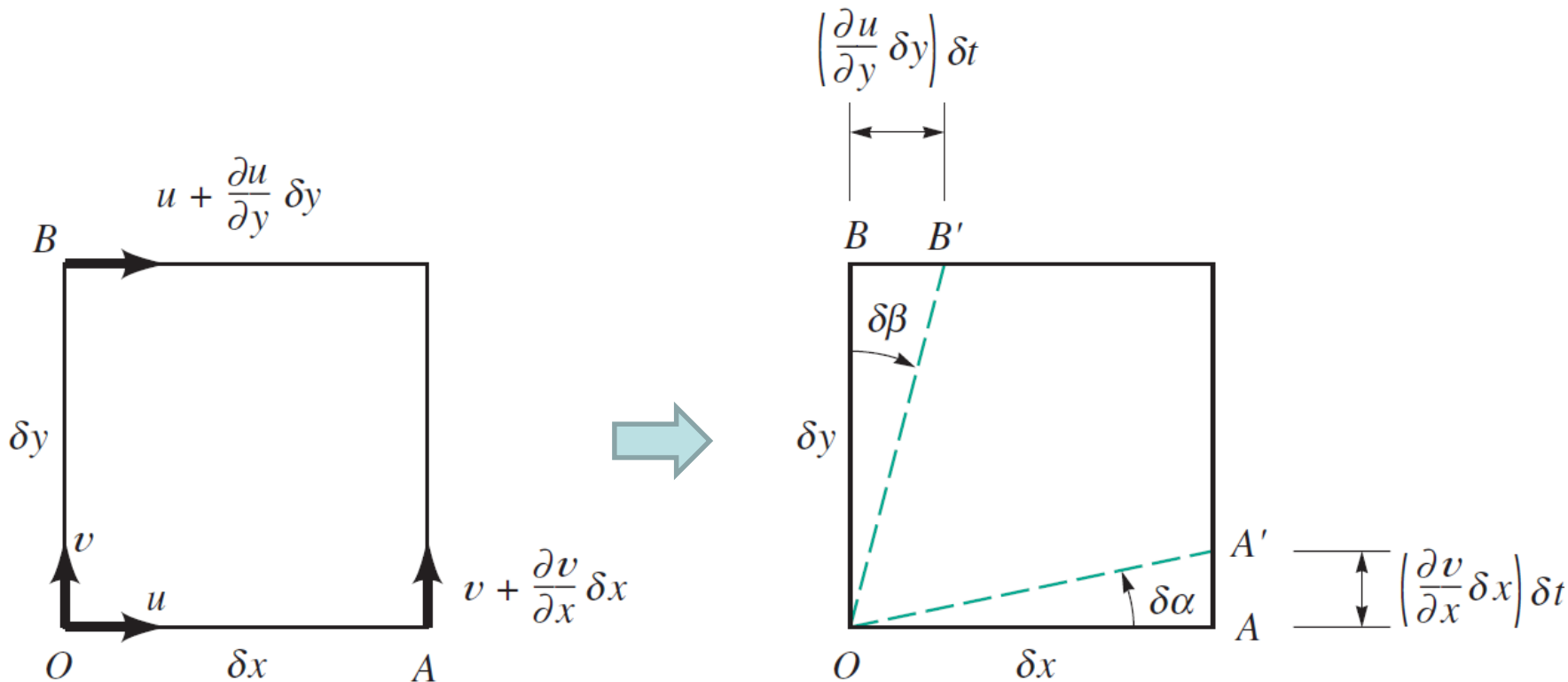
(3) ω_x , ω_y , ω_z 的物理意义



流体微团的运动形式

对于一个方形流体微团，在时间 δt 内直角边 OA 的角度变化为：

$$\delta\alpha = \tan(\delta\alpha) = \frac{\partial v}{\partial x} \delta x \delta t / \delta x = \frac{\partial v}{\partial x} \delta t$$

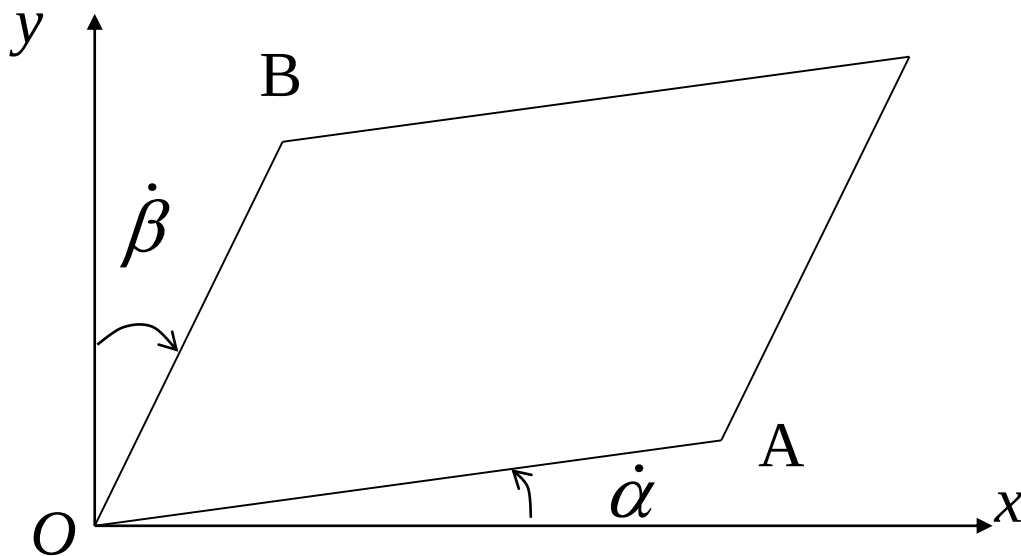




流体微团的运动形式

因此OA的角速度(angular velocity)为: $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$ (当 $\delta x, \delta t \rightarrow 0$ 时)

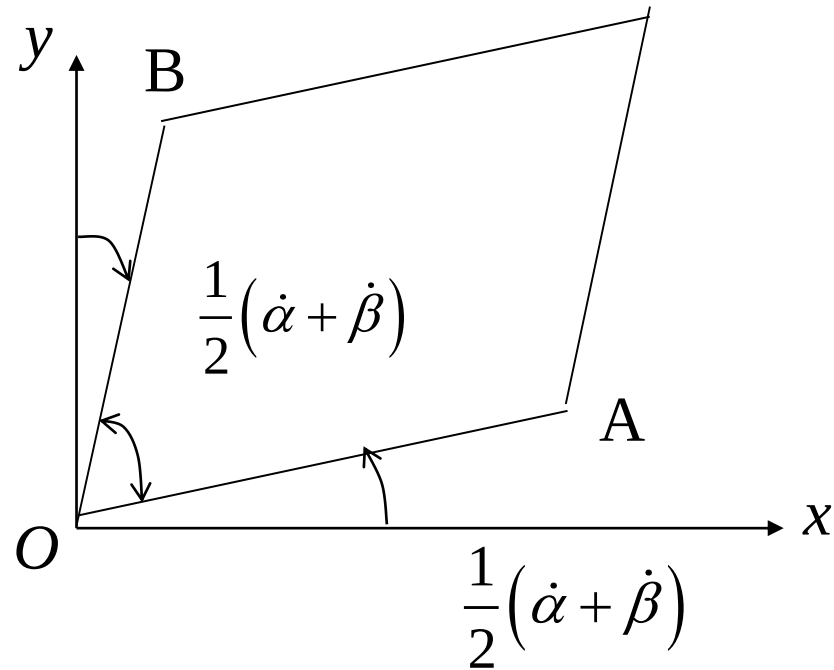
同样可以得到OB的角速度: $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y}$ (当 $\delta y, \delta t \rightarrow 0$ 时)





流体微团的运动形式

$$\begin{aligned}\therefore \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\end{aligned}$$



表示流体微团中某一直角的角度变形速率，称为角变形速率或称剪切变形角速度。当 $\varepsilon_{xy} > 0$ 时，表示角度变小，反之，角度变大。



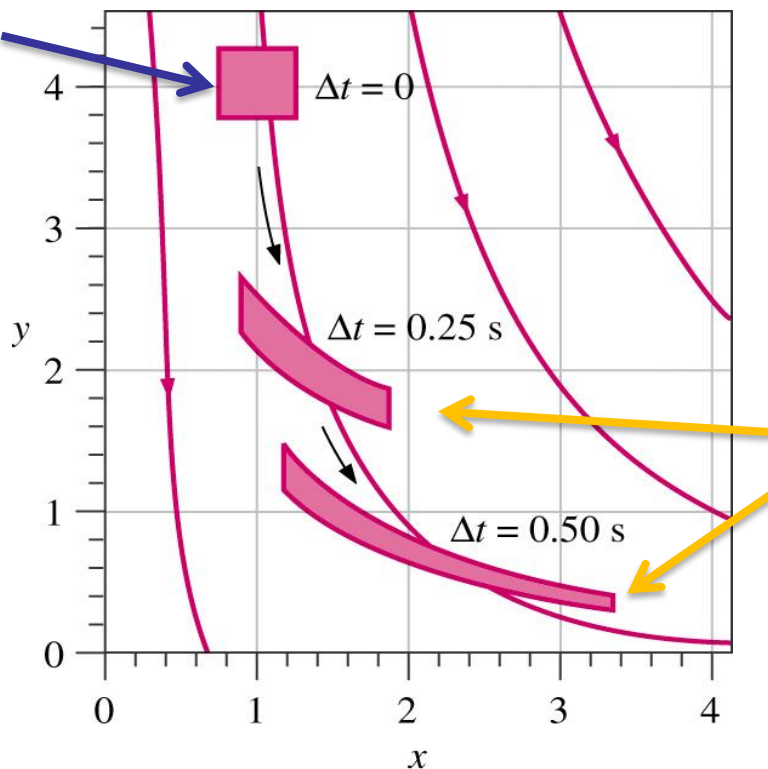
流体微团的运动形式

同样有：

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

变形前

观察某流体微团的角变形→



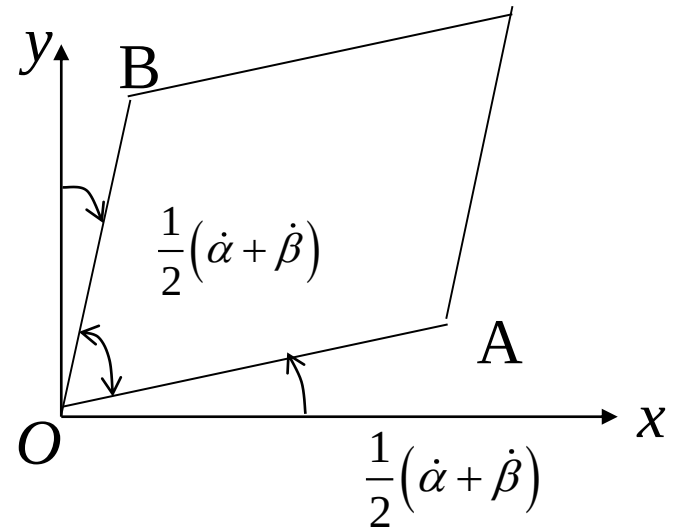
变形后



流体微团的运动形式

以上考虑的是直角边OA和OB沿着**相反方向旋转**（速度均为正）时流体微团的变形，即：

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial v}{\partial x} > 0 \quad \dot{\beta} = \frac{\partial u}{\partial y} > 0$$

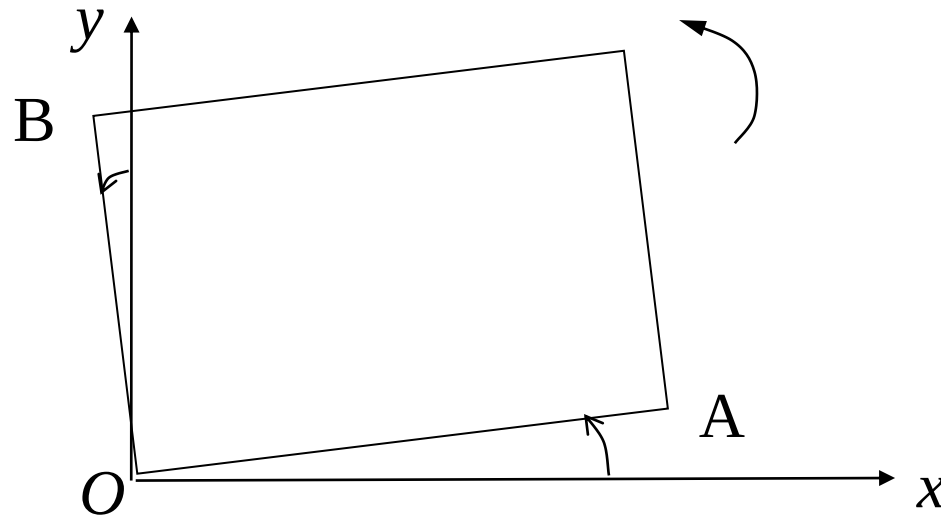


假如直角边OA和OB向**相同方向旋转**，流体微团会发生什么变化？



流体微团的运动形式

如果定义逆时针方向为正，当直角边OA和OB向**相同方向**运动时：





流体微团的运动形式

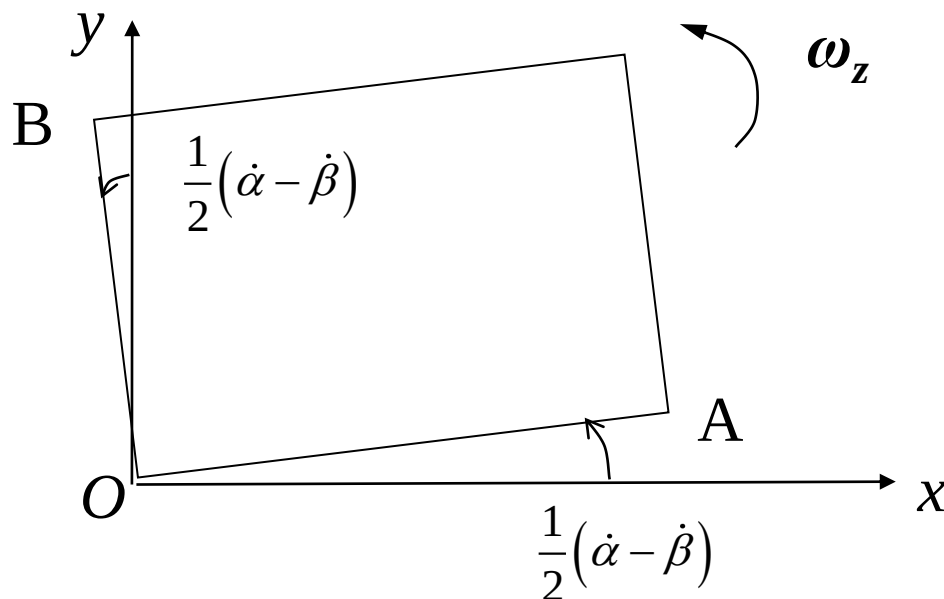
类似地：

$$\omega_z = \frac{1}{2}(\dot{\alpha} - \dot{\beta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

定义为流体微团的旋转角速率。

由于是在Oxy平面绕z轴的旋转运动，将其表示为： ω_z

当 $\omega_z > 0$ 时，流体微团沿逆时针方向旋转，反之，沿顺时针方向旋转。





流体微团的运动形式

同样有：

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$



流体微团的运动形式

$$\mathbf{V}_{M'} = \left[\underbrace{\underline{u}}_{(1)} + \underbrace{\omega_z dy + \omega_y dz}_{(2)} + \underbrace{\varepsilon_{xx} dx}_{(3)} + \underbrace{\varepsilon_{xy} dy + \varepsilon_{xz} dz}_{(4)} \right] \mathbf{i} + (\cdots) \mathbf{j} + (\cdots) \mathbf{k}$$

流体微团
运动

平移运动 (1)

+

旋转运动 (2)

+

线变形运动 (3)

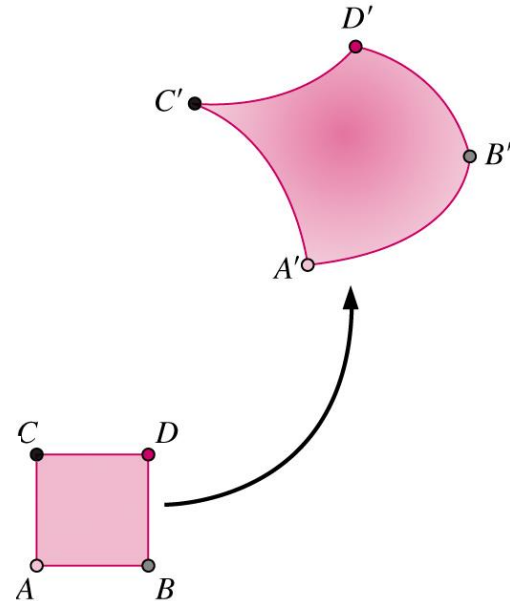
+

角变形运动 (4)

(刚体运动)

(体积的变化)

(形状的变化)

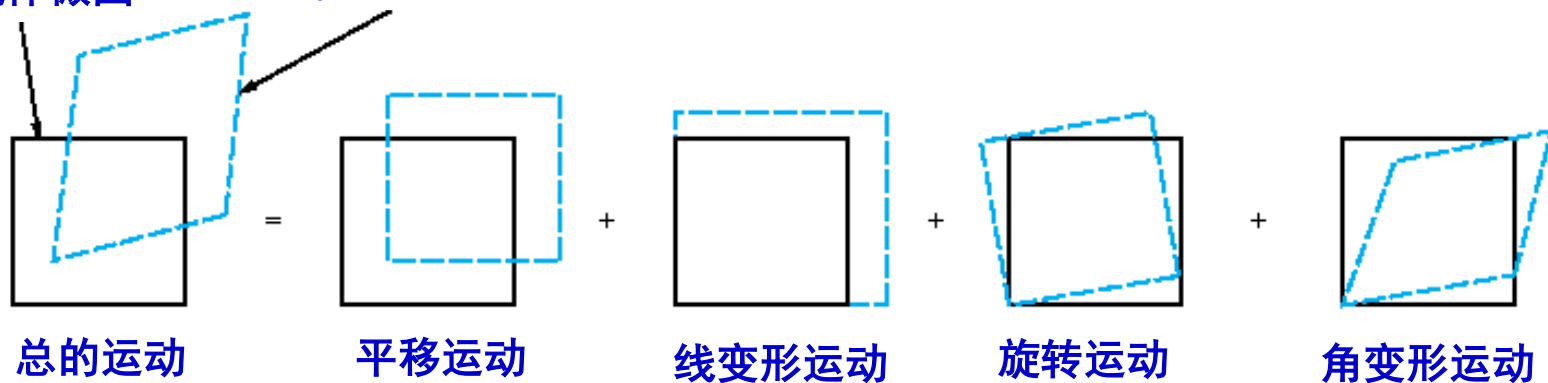




流体微团的运动形式

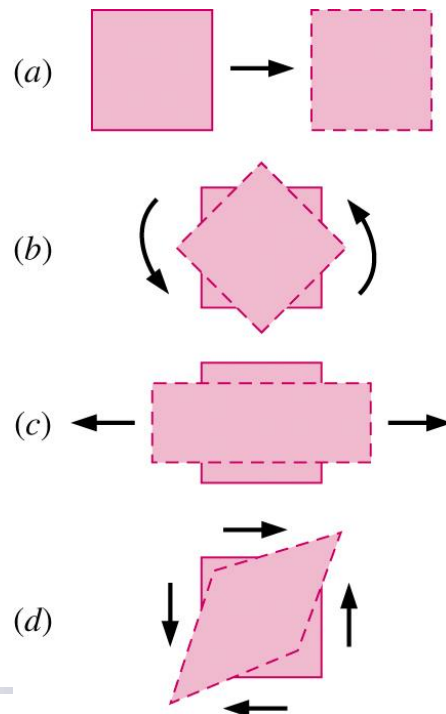
t_0 时的流体微团

$t_0 + \delta t$ 时的流体微团



Helmholtz速度分解定理:

流体微团的运动(速度)可以分解为四部分, 即 (1) 平移运动; (2) 旋转运动; (3) 线变形运动; (4) 角变形运动。





流体微团的运动形式

Helmholtz速度分解定理可以写成张量形式：

令 $\delta \mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$

有

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r}$$

平移速度

变形速度

旋转角速度



流体微团的运动形式

变形率 (张量)

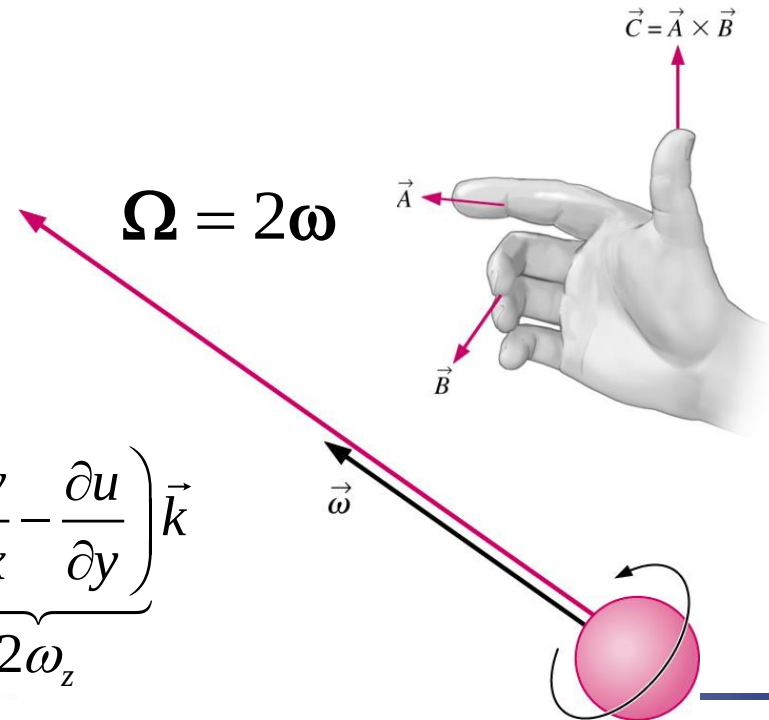
$$\mathbf{E} = e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

旋转速度 (矢量)

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}$$

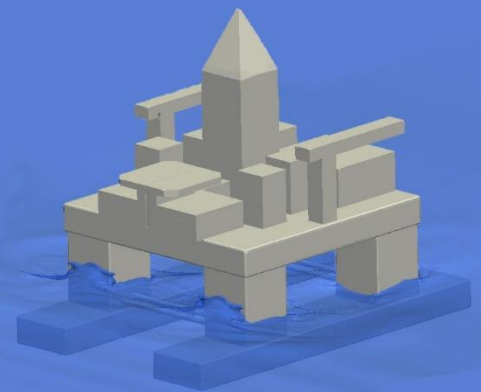
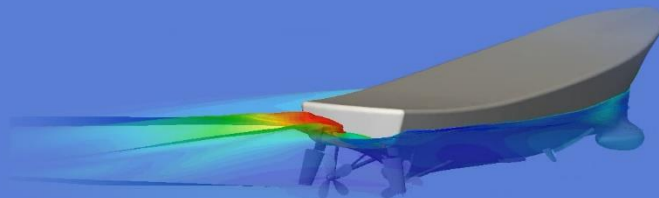
涡量 $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$ 单位: 秒分之一 (s^{-1})

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)}_{2\omega_x} \vec{i} + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)}_{2\omega_y} \vec{j} + \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{2\omega_z} \vec{k} \end{aligned}$$



CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

<http://dcwan.sjtu.edu.cn>



*部分素材来源于网络