上海交通大學 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主 讲 人：万德成

章节：第3章 流体运动学

内容：3.5 无旋运动的速度势

速度势

根据流体微团旋转角速度$\vec{\omega}$或涡量$\vec{\Omega}$是否为零，可将流体运动分为有旋运动$\vec{\Omega} \neq 0$和无旋运动$\vec{\Omega}=0$

无旋运动 ⇨

$$\begin{cases} \Omega_x = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ \Omega_y = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \Omega_z = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

速度势

针对无旋运动

——速度势 (velocity potential)

速度势

根据空间格林定理：设$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$及其偏导数

$$\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial P}{\partial z},\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial R}{\partial y}$$

等在空间闭区域中及其边界上皆为单值连续函数，若在区域中下式成立：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial z}&=\frac{\partial R}{\partial y}\\ \frac{\partial R}{\partial x}&=\frac{\partial P}{\partial z}\\ \frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{\partial Q}{\partial x}\end{aligned}\right\}$$

⇒ 则必存在一个由如下线积分所定义的函数，这个**函数是有势**的，称为**势函数**：

$F(x,y,z)$

⇒

$$F(x,y,z)=\int Pdx+Qdy+Rdz$$

这一积分与路径无关

速度势

由于：$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

那么：

$$F(x,y,z)=\int dF$$
$$=\int Pdx+Qdy+Rdz$$
$$=\int \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz$$

得到如下对应关系：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=P\\ \frac{\partial F}{\partial y}&=Q\\ \frac{\partial F}{\partial z}&=R\end{aligned}\right\}$$

速度势

对于无旋运动，有Ω=0，即：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial z}&=\frac{\partial w}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial z}&=\frac{\partial R}{\partial y}\\ \frac{\partial R}{\partial x}&=\frac{\partial P}{\partial z}\\ \frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{\partial Q}{\partial x}\end{aligned}\right\}$$

对 照

$$u \rightarrow P$$

$$v \rightarrow Q$$

$$w \rightarrow R$$

速度势

从而存在一个函数：

$$\phi(x,y,z,t)=\int udx+vdy+wdz=\int\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

且有如下关系：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x}&=u\\ \frac{\partial\phi}{\partial y}&=v\\ \frac{\partial\phi}{\partial z}&=w\end{aligned}\right\}$$

即： $\mathbf{V}=\nabla\phi$

称 ϕ 为速度的速度势，存在速度势的流动称为势流。

$$\boxed{\text{无旋}\Leftrightarrow\nabla\times\mathbf{V}=0\Leftrightarrow\phi\Leftrightarrow\text{势流}}$$

速度势

速度势的重要意义：

速度势 ϕ 是标量，只有一个分量

$$\phi(x, y, .z; t) = \int u dx + v dy + w dz$$

速度V是矢量，有三个分量

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= u \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= v \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= w \end{aligned}\right\}$$

无旋速度场 $\Leftrightarrow$ 势流

速度势

例子 已知一有旋流动的速度分布为 $u=2(x-a)y,\ v=(x+a)^2-y^2$ 其中a为常数。现有一无旋流动，其流体线变形速度和角变形速度处处与上面有旋流动相同，且原点速度为0，即当$x=y=0$时，$u=v=0$，求无旋流动的速度分布和速度势。

解： 已知的有旋流动的变形速度为

线变形速度： $\varepsilon_{xx}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2y,\quad \varepsilon_{yy}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=-2y$ (a)

角变形速度： $\varepsilon_{xy}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=2x\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=4x$ (b)

由题目条件知道，无旋流动的流体线性变形速度和角变形速度处处与上面相同。此外，无旋流动必须满足

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad \text{(c)}$$

速度势

由(c)+(b)得： $\dfrac{\partial v}{\partial x}=2x$ 即 $v=x^2+f(y)$

把上式代入(a)式，可得 $f'(y)=-2y$， 即 $f(y)=-y^2+C_1$

由(c)一(b)得： $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2x$ 即 $u=2xy+g(x)$

把上式代入(a)式，可得 $g'(x)=0$， 即 $g(x)=C_2$

上面 C_1和C_2 是积分常数，由条件 $x=y=0$ 时， $u=v=0$

得到：$C_1=C_2=0$ ，从而得到速度分布为：

$$u=2xy,\quad v=x^2-y^2$$

速度势

速度分布为：

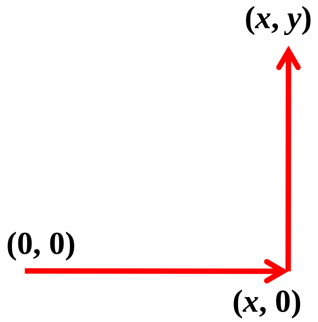
$$u = 2xy, \quad v = x^2 - y^2$$

速度势为：

$$\phi = \int u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y = \int 2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{(0,0)}^{(x,0)} + \int_{(x,0)}^{(x,y)} = 0 + \int_{(x,0)}^{(x,y)} \left(x^2 - y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$= x^2 y - \frac{1}{3} y^3$$



第三章要点

- 描述流体运动的两种方法：

  拉格朗日方法，欧拉方法

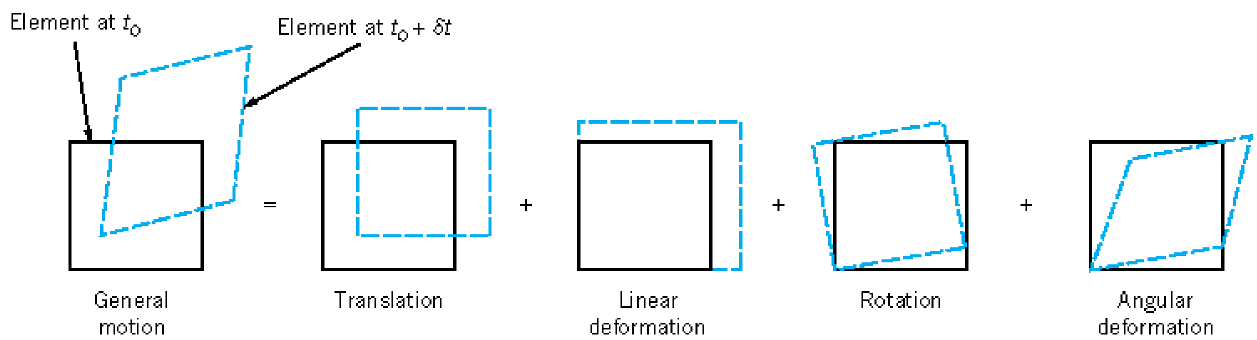
- 随体导数：
$$\frac{D(\ )}{Dt}=\frac{\partial(\ )}{\partial t}+(\mathbf{V}\bullet\nabla)(\ )$$

- 迹线方程：
$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=dt$$

- 流线方程：
$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$$

第三章要点

- 流体微团的运动和变形



- 亥姆霍兹速度分解定理

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r} \qquad \mathbf{E} = e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

- 有旋运动和无旋运动

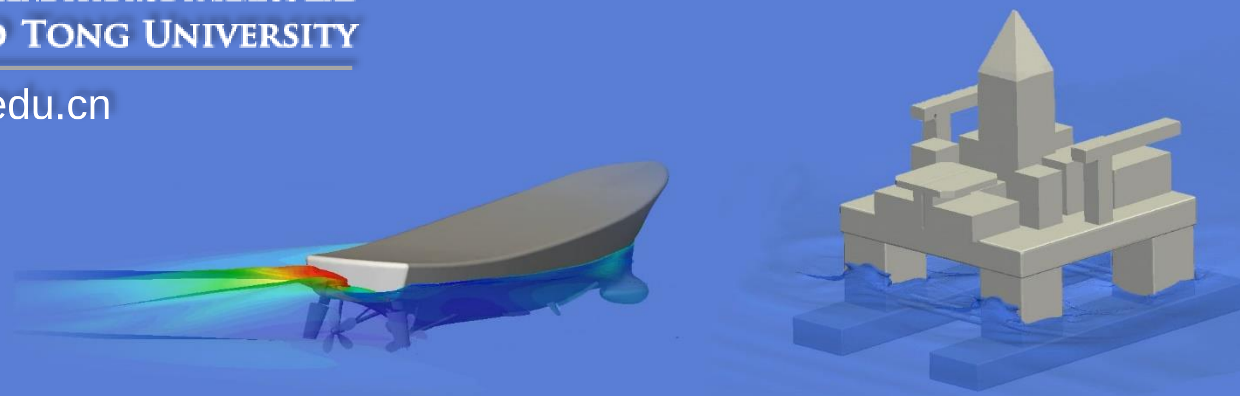
$$\Omega = \left(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\right) = 0 \qquad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}$$

- 速度势：针对无旋运动流体

$$\mathbf{V} = \nabla \phi, \quad \phi(x, y, z; t) = \int u dx + v dy + w dz$$

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

http://dcwan.sjtu.edu.cn



*部分素材来源于网络