上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主 讲 人：万德成

章节：第4章 流体动力学

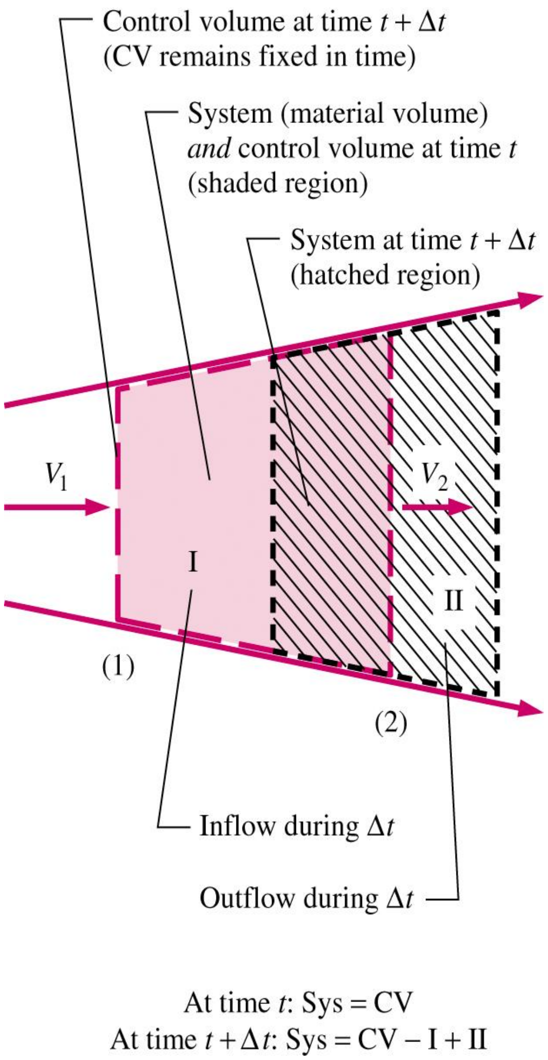
内容：4.2 质量守恒定律与连续方程

雷诺输运定理

雷诺输运定理（RTT）

任何一个物理量*G*都满足下列物质体积与控制体积的关系式：

$$\frac{d}{dt}\iiint_{MV} G d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} G d\forall + \iint_{CS} G \mathbf{V}\cdot\mathbf{n} dS$$



连续方程

连续方程(Continuity Equation):

也称为质量守恒方程(Conservation of Mass)

在RTT方程中，如果物理量为质量，即 $G=\rho$，可以得到：

L.H.S. $$\frac{d}{dt}\iiint_{MV}\rho d\forall=\frac{d}{dt}\left(\text{mass in } MV\right)=0$$

(由 MV的定义：在MV中总是包含相同的流体。)

R.H.S. $$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV}\rho d\forall+\iint_{CS}\rho \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}dA$$

$$=\underbrace{\iiint_{CV}\frac{\partial\rho}{\partial t}d\forall}_{CV\ \text{is stationary}}+\underbrace{\iiint_{CV}\nabla\cdot\left(\rho\boldsymbol{V}\right)d\forall}_{\text{by Gauss theorem}}$$

连续方程

由于控制体积CV是任一选取的，因此可以得到：

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{V}\right)=0}$$

这就是连续方程。进一步，可以把上式改写：

把 $\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{V}\right)=\mathbf{V}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\mathbf{V}$ 代入上式，可以得到：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{V}=0$$

或 $$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0$$

连续方程

对于不可压缩流体(incompressible fluid)，我们知道：

$\boxed{\text{流体质点的密度不随时间改变}} \Leftrightarrow \frac{D\rho}{Dt}=0$

因此，对应不可压缩流体，连续方程为：

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

即：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

连续方程

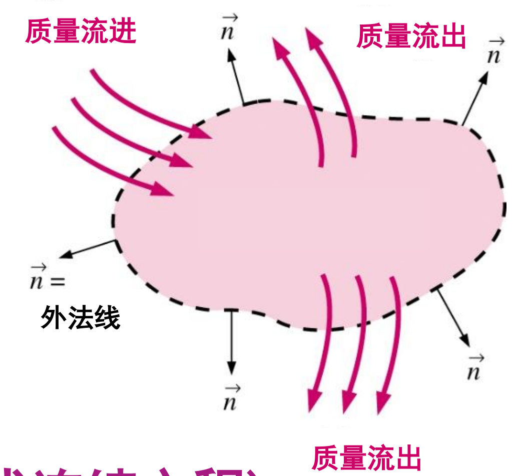
也可以从质量守恒的角度来得到连续方程。在流场中任取一流域 $\forall$，其表面积为S，此时质量守恒定律的描述为：

流体质量增加（减少） = 单位时间内流进（流出）S的质量流量

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\forall} \rho \, d\forall = -\oiint_{S} \rho(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\, dS = -\iiint_{\forall} \nabla\cdot(\rho\mathbf{V})\, d\forall$$

$$\Rightarrow \quad \iiint_{\forall} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{V})\right] d\forall = 0$$

（积分形式连续方程）



由于$\forall$是任取的，所以有：

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) = 0}$$

（微分形式连续方程）

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{V} = 0}$$

连续方程

由于可以从质量守恒推导得到，因此连续方程也称为质量守恒方程。无论理想流体还是真实流体，均应满足连续方程，否则流动为不可能。

连续方程的几种不同表达形式：

可压缩非定常流动： $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

可压缩定常流动： $$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

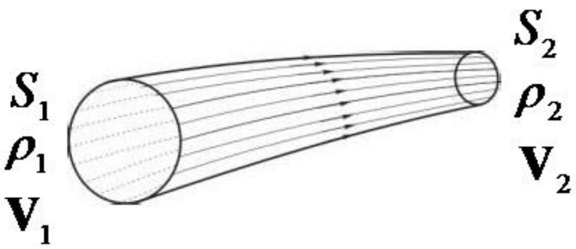
不可压缩非定常流动： $$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

不可压缩定常流动： $$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

连续方程

流管流动：

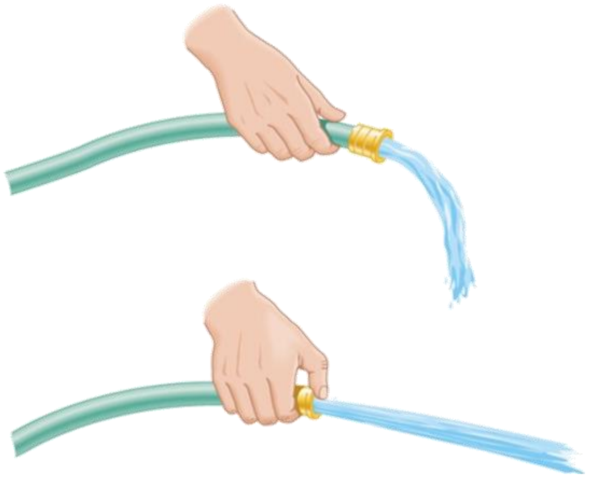
如果S_1、S_2为流管横截面积，V_1、ρ_1、V_2、ρ_2为横截面上平均流速和密度，则定常流动的质量守恒方程或连续方程为：



$$\rho_1\mathbf{V}_1S_1=\rho_2\mathbf{V}_2S_2$$

$$or$$

$$\rho\mathbf{V}S=const$$



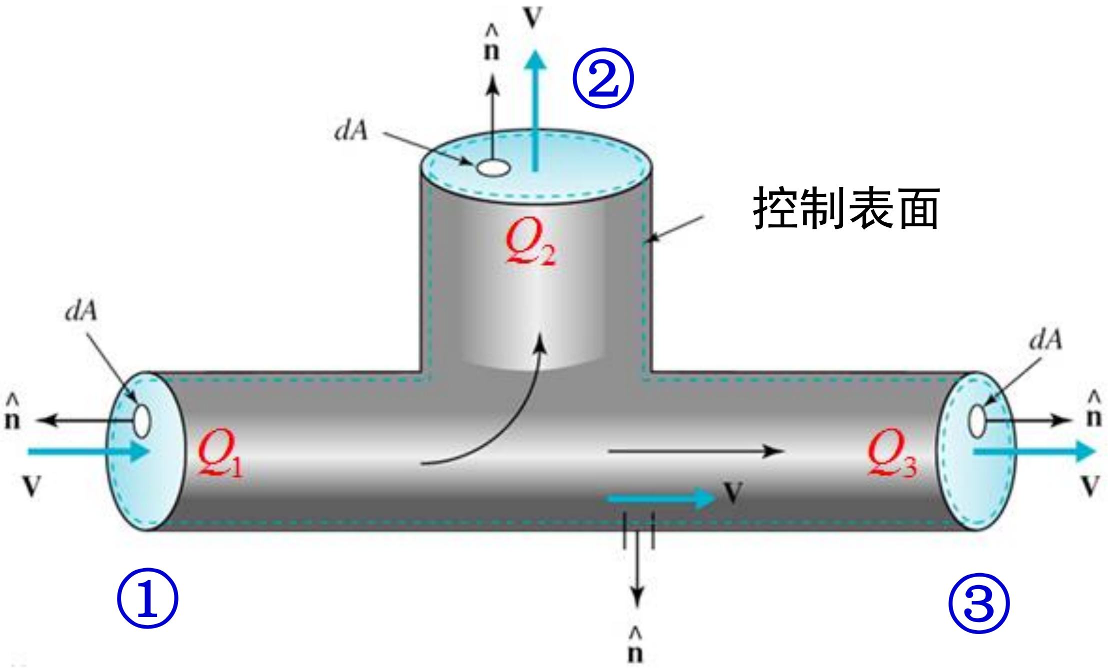
对于不可压缩流动：

$$\mathbf{V}_1S_1=\mathbf{V}_2S_2$$

连续方程

工程中管道流动

$$\oiint_{CS} \rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, dA = 0$$



$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

连续方程

例子 一个三维不可压缩流场速度分布为 $u = x^2 y, \quad v = 4y^3 z, \quad w = 2z$

问这个流动是否是一个真实流动?

解:

不可压缩流体的真实流动必须满足连续条件，即:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

对于给出的速度场，有:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 12y^2 z, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 2$$

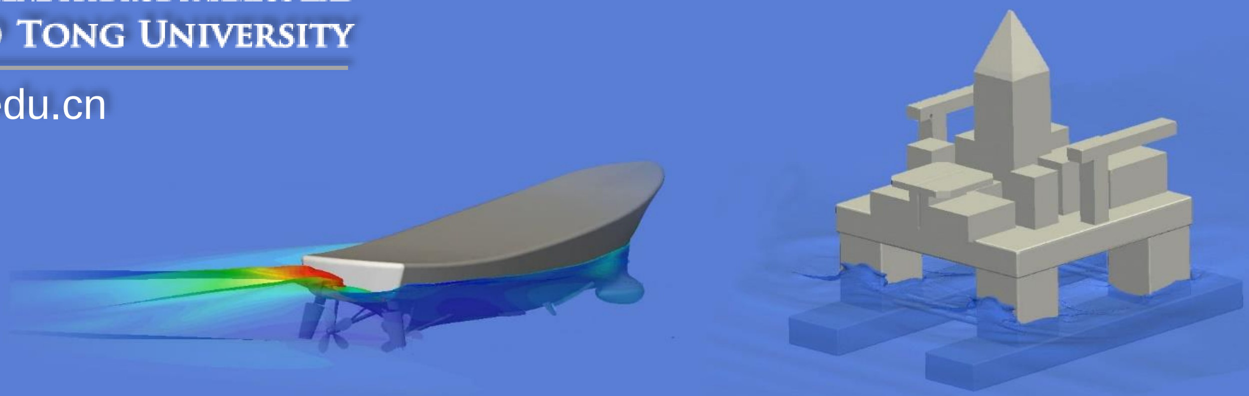
可以看出:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 2xy + 12y^2 z + 2 \neq 0$$

因此这个速度场不是一个真实的流动。

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

http://dcwan.sjtu.edu.cn



*部分素材来源于网络