



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主讲人：万德成

章节：第4章 流体动力学

内容：4.3 不可压缩平面流动的流函数



- **流函数 (stream function)**
—— **针对不可压缩平面流动**

不可压缩平面流动：

$$u = u(x, y, z, t), \quad v = v(x, y, z, t), \quad w = 0$$



定理： 如果函数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在封闭区域及其边界上具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int Pdx + Qdy$ 与路径无关之充分且必要条件是：
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad .$$

根据连续方程可知：对于不可压平面二维流动满足：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(-v)$$

如果令 $P = -v$, $Q = u$ ，则存在一积分函数：

$$\psi = \int Pdx + Qdy = \int -vdx + udy$$

与路径无关， $\psi = (x, y, t)$ 称为流函数(stream function)。

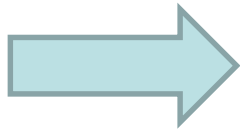


流函数

$$\psi = \int -v dx + u dy$$



$$\int d\psi = \int -v dx + u dy$$



$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = \int -v dx + u dy$$



$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \end{cases}$$



流函数存在条件：

对于理想或真实流体，只要是不可压流的二元流，均存在流函数；

对于可压流体平面流动，只要流动是定常的，也同样存在流函数：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (-\rho v)$$

$$\Rightarrow \quad \psi = \int -\rho v dx + \rho u dy \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ -\rho v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$



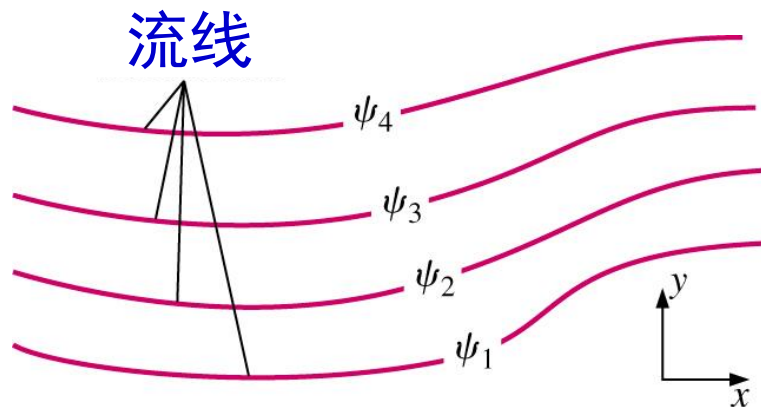
流函数的一些性质：

1) 流函数与流线关系：流函数的等值线是流线，即流线上的流函数值不变。

由于：
$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$$

所以，若 $\psi = C$ 则 $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$ ，即代表流线方程。

注意：流函数仅存在于连续方程只含平面二维的流动中，而流线存在所有可能的流动中。

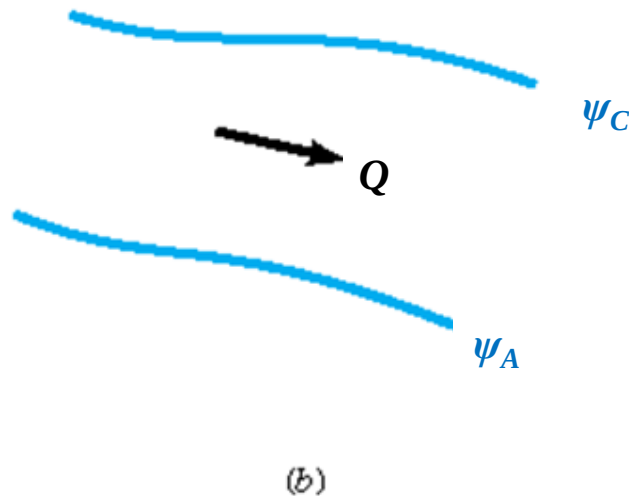
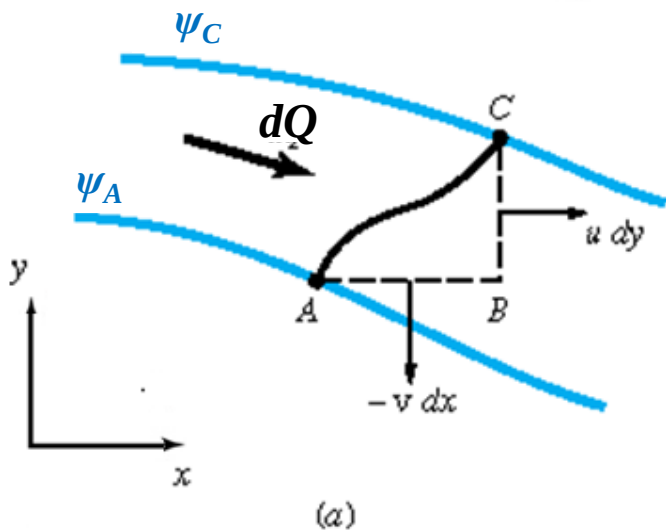




2) 流函数 ψ 与流量 Q 关系: 流过任意曲线的流量, 等于曲线两端点流函数值之差, 即

$$Q_{AC} = \psi_C - \psi_A \quad (\psi \text{ 为单值函数})$$

$$\because dQ = udy - vdx = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi \quad \therefore Q_{AC} = \int_A^C d\psi = \psi_C - \psi_A$$





3) 不可压缩无旋二维势流的速度势和流函数都是调和函数，满足 Laplace 方程。

A、不可压缩(二)三维势流(无旋)

$$\left. \begin{array}{l} \text{无旋} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{V} = 0 \Rightarrow \mathbf{V} = \nabla \phi \\ \text{不可压} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla^2 \phi = 0$$

B、不可压缩二维势流(无旋)

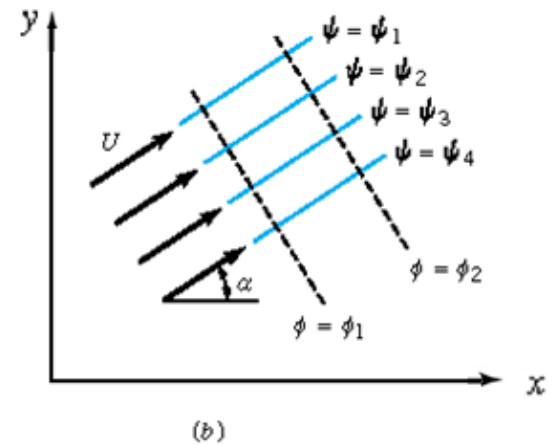
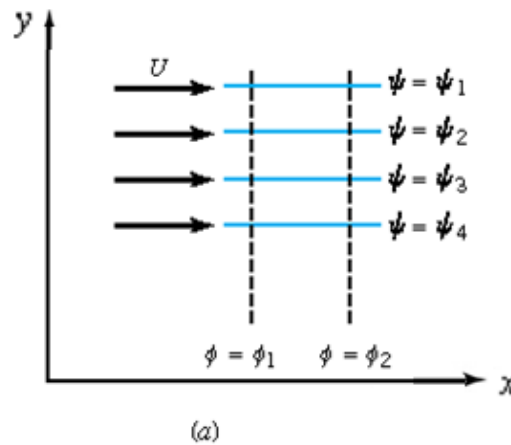
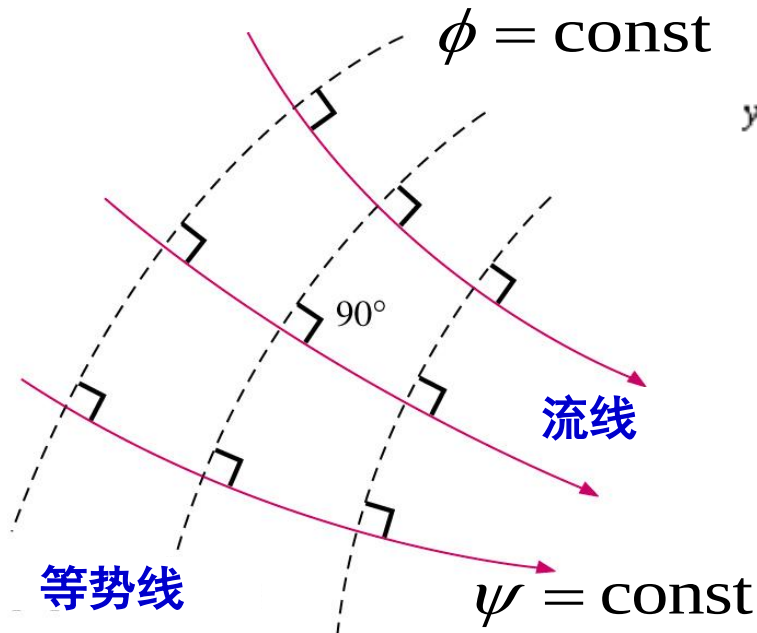
$$\left. \begin{array}{l} \text{二维不可压} \Rightarrow u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \text{二维无旋} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla^2 \psi = 0$$



流函数

4) **流网线**(flow net): 由二维不可压势流的**流线**(streamlines)和**等势线**(equipotential lines)组成的交叉格子线。

$$\nabla \phi \equiv \mathbf{V} \quad \perp \quad \text{equipotential lines}$$
$$\Rightarrow \text{streamlines} \quad \perp \quad \text{equipotential lines}$$





流函数

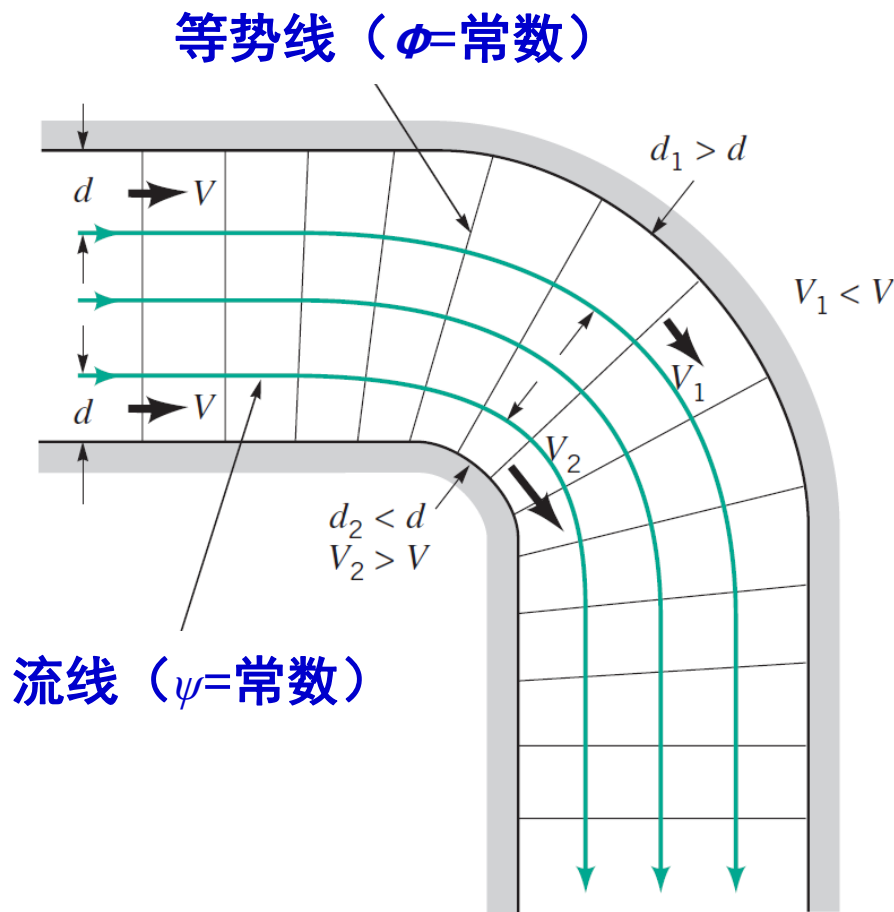
对于一个 90° 弯管，有：

$$V \approx \frac{\Delta\phi}{\Delta n} \approx \frac{\Delta\psi}{\Delta s}$$

Δn 是邻近两条等势线的距离。

Δs 是邻近两条流线的距离。

流网线密，表示流速大；
流网线疏，表示流速小。





例题 已知一个流场速度势， $\phi = 4xy$ ，求其对应的流函数。

解：

首先验证 ψ 是否存在，即

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

由速度势，可以得到速度分布：

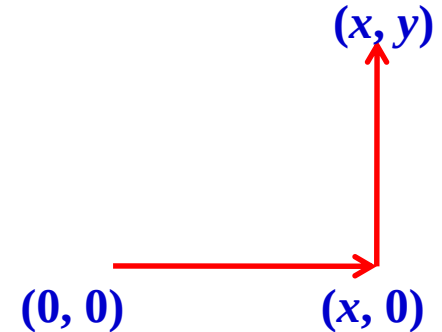
$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 4y, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 4x$$

从上式，得到： $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ，因此存在流函数。



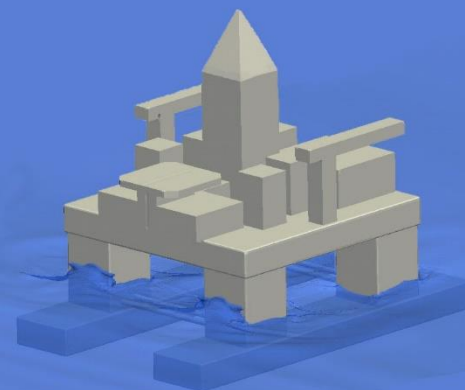
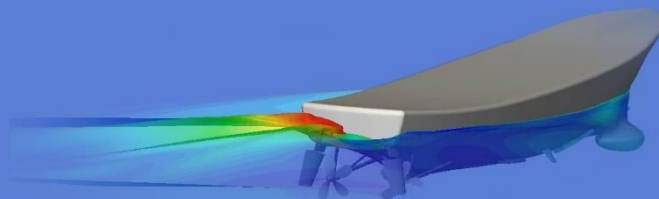
由流函数定义，有：

$$\begin{aligned}\psi &= \int -v dx + u dy = \int -4x dx + 4y dy \\ &= \int_{(0,0)}^{(x,0)} + \int_{(x,0)}^{(x,y)} = -2x^2 + 2y^2\end{aligned}$$



CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

<http://dcwan.sjtu.edu.cn>



*部分素材来源于网络