

上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主 讲 人：万德成

章节：第4章 流体动力学

内容：4.4 动量守恒定律与动量方程

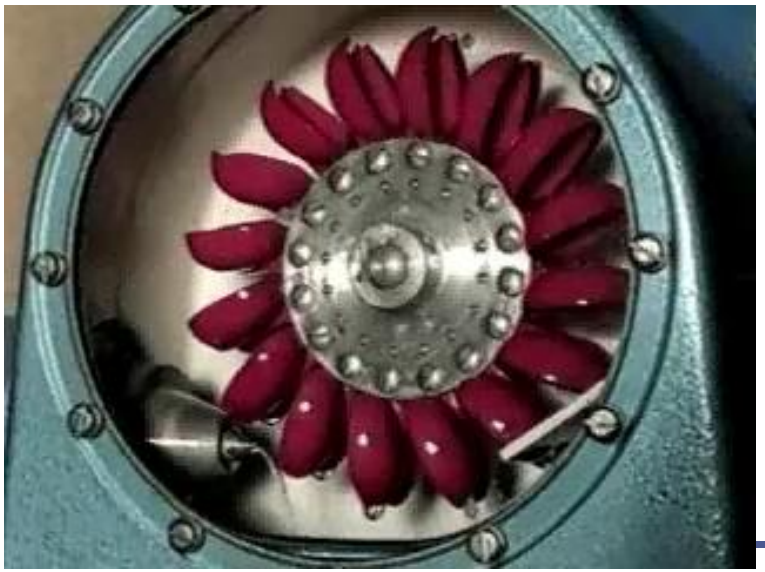
动量方程

动量守恒原理（牛顿第二定理）：

物体动量变化率等于作用在物体上的力。

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{V}\right)}{dt}$$





动量方程

在给出动量方程前，先推导一个关系式。

在RTT中，取 $G=\rho\mathbf{V}$，则有：

$$\frac{d}{dt}\iiint_{MV}\rho\mathbf{V}d\forall=\iiint_{CV}\frac{\partial\rho\mathbf{V}}{\partial t}d\forall+\iint_{CS}\rho\mathbf{V}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$$

$$=\iiint_{CV}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathbf{V}+\rho\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V}\mathbf{V})\right]d\forall$$

$$=\iiint_{CV}\left\{\mathbf{V}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})\right]+\rho\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}\right]\right\}d\forall$$

$$=\iiint_{CV}\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}d\forall=\iiint_{MV}\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}d\forall$$

即：

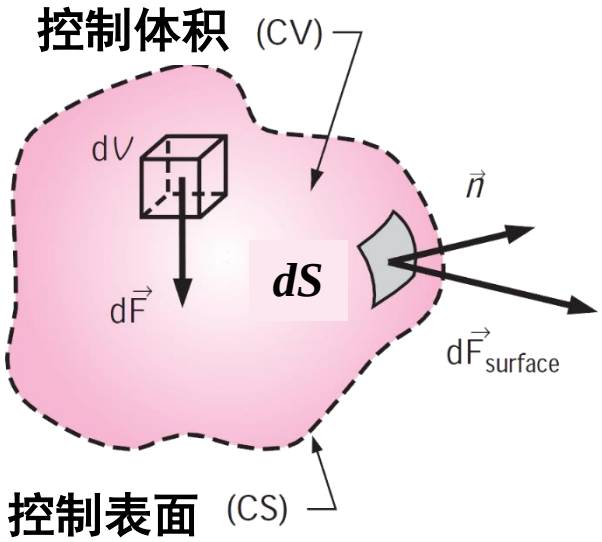
$$\frac{d}{dt}\iiint_{MV}\rho\mathbf{V}d\forall=\iiint_{MV}\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}d\forall=\iiint_{CV}\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}d\forall$$

动量方程

由**动量守恒**原理：流体微团的动量变化率等于作用在流体微团上的力，即：

$$\frac{d}{dt}\iiint_{MV}\rho\mathbf{V}d\forall = \iint_{MS}\mathbf{s}dS + \iiint_{MV}\rho\mathbf{g}d\forall$$

动量变化率　　表面力　　体积力



右边第一项：$$\iint_{MS}\mathbf{s}dS = \iint_{MS}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}dS = \iiint_{MV}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}d\forall$$

因此：$$\frac{d}{dt}\iiint_{MV}\rho\mathbf{V}d\forall = \iiint_{MV}\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}d\forall = \iiint_{MV}\left(\rho\mathbf{g}+\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)d\forall$$

动量方程

由于MV(CV)任意取，所以有：

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{g}$$

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}\right)=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{g}\quad\text{or}\quad\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+\rho g_i$$

?

上式就是动量方程(momentum equation)。

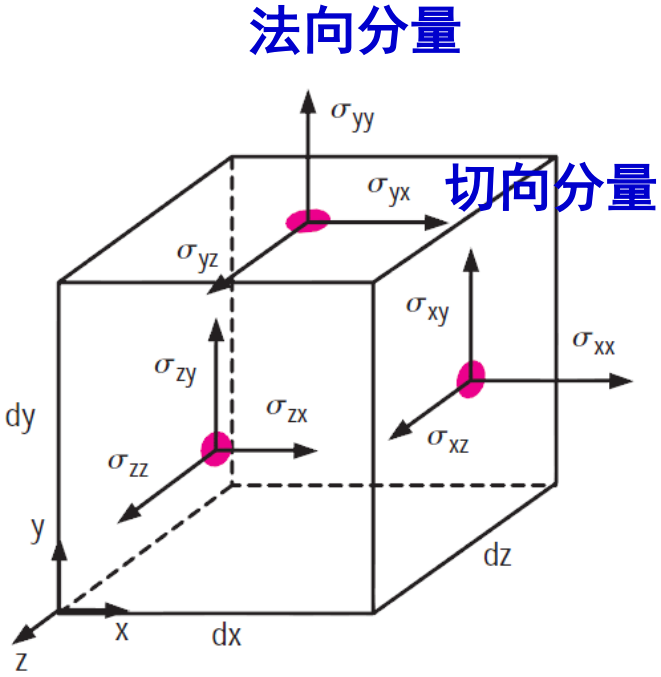
动量方程

张量：

- 表示在矢量、标量和其他张量之间的线性关系
- 具有大小和多个方向（阶数）

三维问题：3^n个分量，n是张量的阶数

- 标量：3^0，如：压力
- 矢量：3^1，如：速度
- 张量：3^2，如：应力



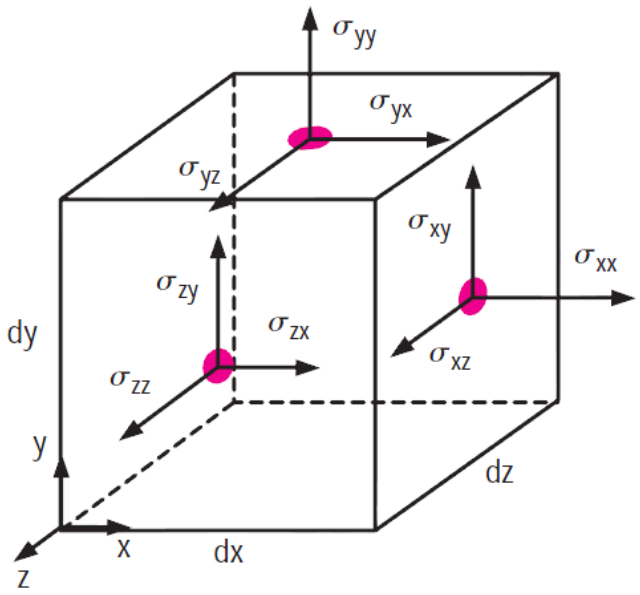
流体微团

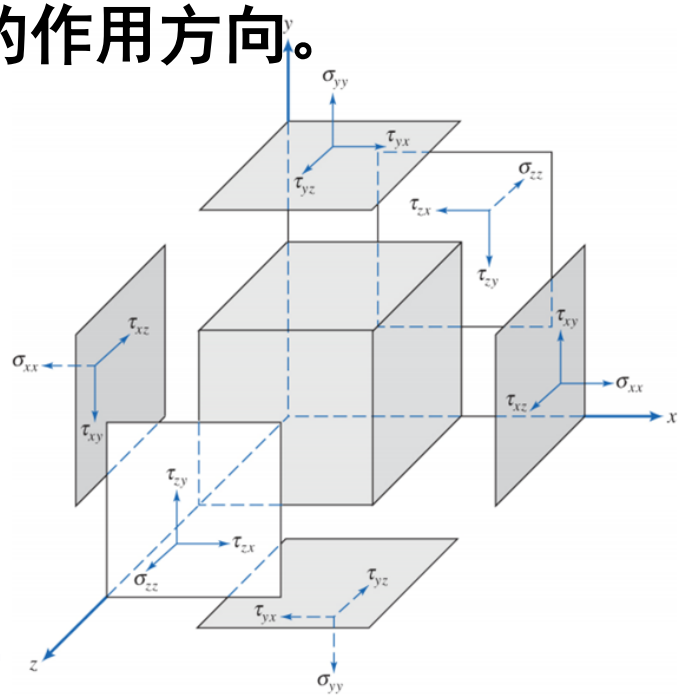
动量方程

表面应力的表示：表面应是二阶张量（3^2）。

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}=\sigma_{ij}\quad (i,j=1,2,3)$$

σ_{ij} 第一个下标 i 表示表面力作用面(法线方向)，第二个下标 j 表示表面力的分量，也就是表面力的作用方向。



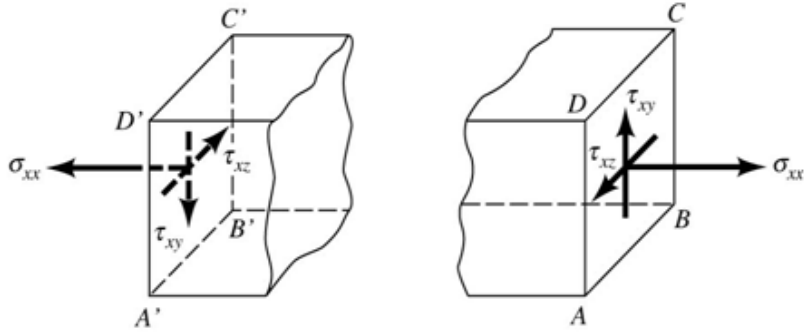


动量方程

由微团的平衡关系可知：

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (i \neq j)$$

所以表面应力张量是对称张量。



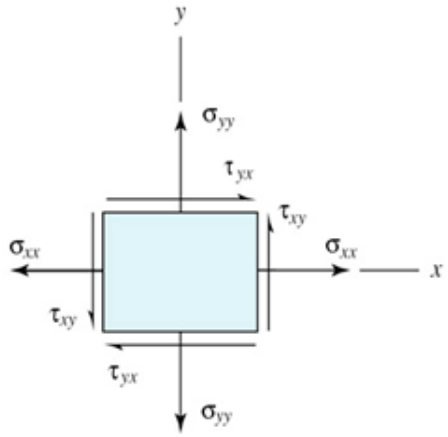
由于压力为法向应力，
因此把表面应力改写为：

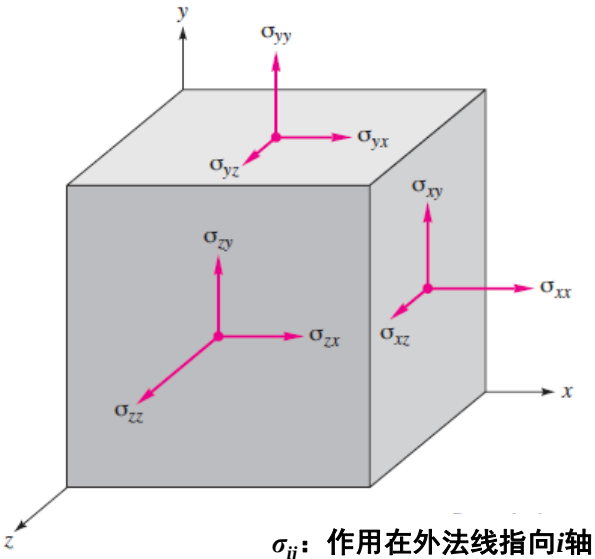
$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

偏应力张量

主应力

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases}$$





σ_{ij}：作用在外法线指向i轴的表面上且沿j方向的表面应力

动量方程

当流体静止时或者理想流体运动时，都只有法向压力作用在表面上，因此，流体中某一点处的表面应力写为：

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

动量方程

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}+\rho g_i \Rightarrow \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial(-p\delta_{ij}+\tau_{ij})}{\partial x_j}+\rho g_i$$

上述方程共有十个未知量：三个 u_i，一个压力 p，三个 $\tau_{ij}(i\neq j)$，三个独立的 τ_{ii} 。

控制方程只有四个：

三个动量方程，一个连续方程。

为了封闭上述方程，需要建立表面力与运动学的关系(relations of the surface force and the kinematics)，即应力与应变率(stress vs strain-rate)的关系，或称为本构方程(constitutive equation)。

动量方程

应力与应变率关系的建立：

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

对**牛顿流体**(Newtonian fluid)，由牛顿内摩擦定律，我们知道剪应力与速度梯度成线性关系。对于一个流体微团，可以推广这个关系，得到**广义牛顿内摩擦定律**，即：

$$\tau_{ij} = C_{ijlm}\frac{\partial u_l}{\partial x_m}$$

这里 C_{ijlm} 是四阶张量系数，即有 $3^4 = 81$ 个系数。由张量定理可知，四阶各向同性张量可以由二阶张量组成，即：

$$C_{ijlm} = \lambda\delta_{ij}\delta_{lm} + \mu\left(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}\right)$$

81个系数现在就减为两个，即λ和μ。

λ：第二粘度

动量方程

$$C_{ijlm} = \lambda \delta_{ij}\delta_{lm} + \mu\left(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}\right)$$

把上面二阶形式的系数代入偏应力张量，整理得：

$$\tau_{ij} = C_{ijlm}\frac{\partial u_l}{\partial x_m} = \lambda \frac{\partial u_l}{\partial x_l}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

所以可以得到总表面力与应变率关系：

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} = \left(-p + \lambda \frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

动量方程

对不可压缩流体，有：$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u_l}{\partial x_l} = 0$

得到：$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

所以，不可压缩流体总表面应力与应变率关系：

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

动量方程

把不可压流体的本构关系代入动量方程：

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

动量方程：

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial\left(-p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)}{\partial x_j} + \rho g_i$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i}\right) + \rho g_i$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}\right) + \rho g_i$$

动量方程

得到不可压牛顿流体的动量方程为：

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}+\rho g_i \qquad (i,j=1,2,3)$$

or

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}+g_i$$

(I) (II) (III) (IV) (V)

$\nu=\mu/\rho$ 是流体的运动粘度

或写成矢量形式：

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}\right)=-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{V}+\rho\mathbf{g}$$

动量方程

各项的物理意义：

局部加速度(local acceleration)

变位加速度，对流加速度(convective acceleration)，惯性项(inertia)，非线性项

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}\right)=-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{V}+\rho\mathbf{g}$$

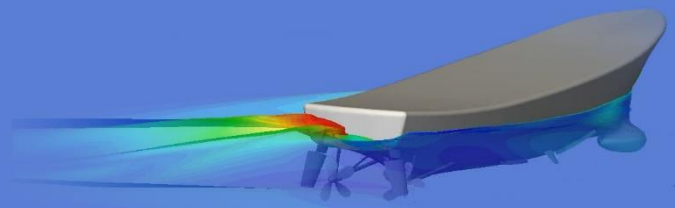
压力梯度(pressure gradient)

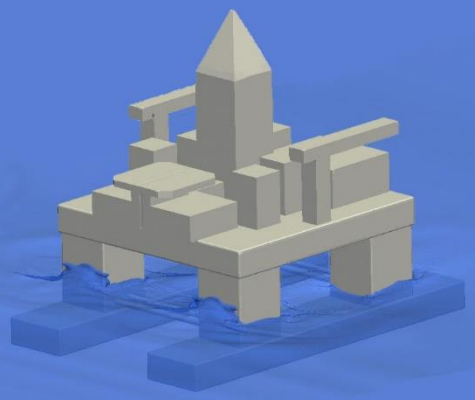
粘性扩散项(viscous diffusion owing to molecular viscosity of the fluid)

重力(gravity)，体积力

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

http://dcwan.sjtu.edu.cn





*部分素材来源于网络