



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主讲人：万德成

章节：第4章 流体动力学

内容：4.5 流体运动基本控制方程



流体运动基本控制方程

连续方程和动量方程组成了流体运动的基本控制方程。

对于不可压牛顿流体，流体运动的基本控制方程为：

连续方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

动量方程：

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{V}$$

这个方程组有四个未知量：三个 u_i ，一个压力 p ，控制方程有四个，因此方程组是封闭的。

这个方程组称为Navier-Stokes方程，简称NS方程。



流体运动基本控制方程

写成分量形式：

连续性方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

x方向动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g_x$$

y方向动量方程

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + g_y$$

z方向动量方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + g_z$$

如果体积力为重力，则有 $g_x = g_y = 0$ 和 $g_z = -g$ 。



流体运动基本控制方程

NS方程是针对真实流体的运动，为了简化问题，我们首先考虑理想流体，即流体不存在粘性，粘性系数为0， $\mu = \nu = 0$ ，这样NS方程可以简化为：

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

上面的控制方程称为理想流体的Euler方程。



由于

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega} = \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - 2\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}$$

所以Euler方程可改写为：

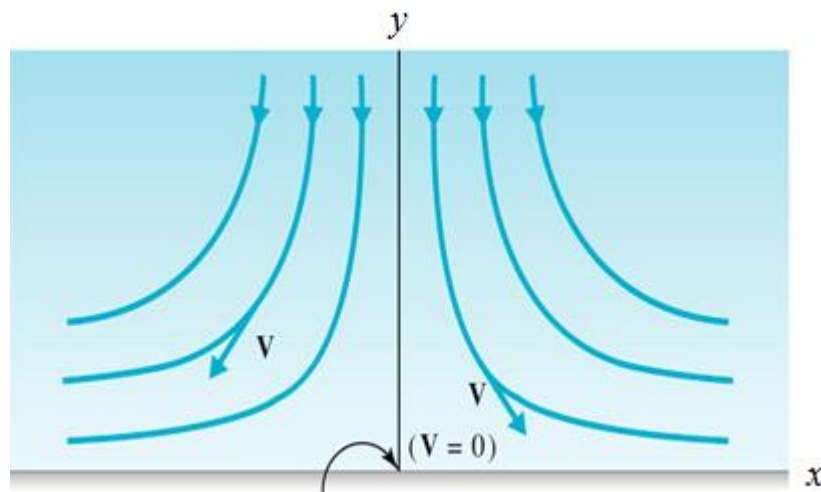
$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - 2\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f},$$

这种形式的Euler方程称为Lamb方程。

流体运动基本控制方程

例子：一个水柱冲向下面的平板，
速度势 $\phi = -k(x^2 - y^2)$ (k 为常数)， ρ 为
流体密度，不考虑粘性。证明沿平
板的压力分布为：

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -4\rho k^2 x$$



证明：由速度势可以得到速度分布：

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -2kx, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2ky \quad (1)$$

可以看出，这个是二维定常理想流体的流动，由Euler方程可以得到：

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$



流体运动基本控制方程

沿平板表面，有 $y = 0, v = 0$ ，代入上式得：

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3)$$

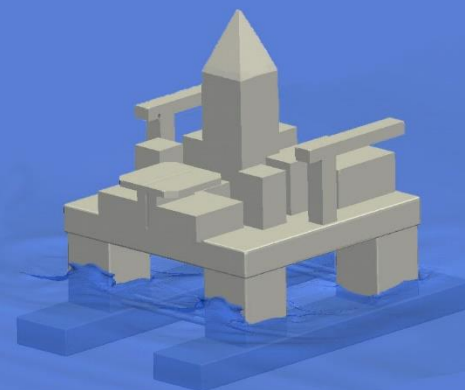
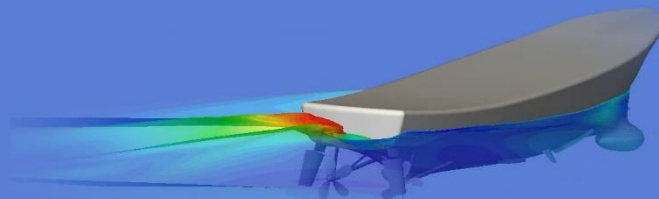
由方程(1)，可以得到：
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2k$$

把上式代入(3)式，得到：

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho(-2kx)(-2k) = -4\rho k^2 x$$

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

<http://dcwan.sjtu.edu.cn>



*部分素材来源于网络