



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主讲人：万德成

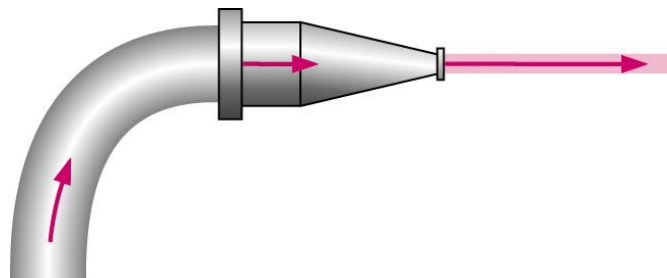
章节：第4章 流体动力学

内容：4.7 流体运动基本方程的简单应用



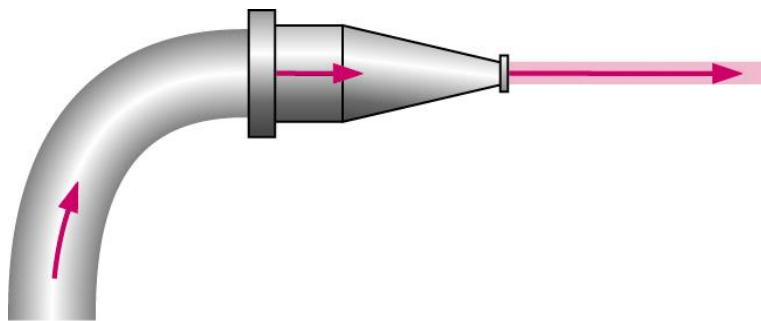
流体运动基本方程的简单应用

应用1: 如图一个消防喷嘴，假定喷水流量为 Q ，喷水管横截面积为 A_1 ，喷嘴处的面积为 A_2 ，问消防员需要多大的握力，才能握住这个消防喷嘴？





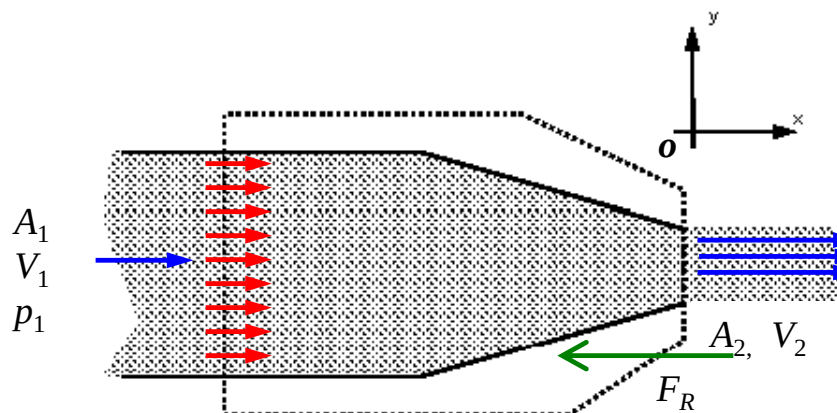
流体运动基本方程的简单应用



解：如图取控制体，根据动量守恒，
这个控制体受到的总作用力为：

$$\sum F = \rho Q (V_2 - V_1)$$

由质量守恒有： $Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$



$$\sum F = \rho Q^2 \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right)$$

假设消防员的握力为 F_R ，合力：

$$\sum F = -F_R + p_1 A_1$$



对喷嘴和水管内截面1和2建立Bernoulli方程，可得：

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

由于喷嘴水平，喷嘴的嘴口处压力为大气压，即 $p_2=0$ ，所以：

$$p_1 = \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2) = \frac{\rho Q^2}{2} \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right)$$



消防员的握力为 F_R ，因此：

$$\sum F = -F_R + p_1 A_1 = \rho Q^2 \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right)$$

$$\Rightarrow F_R = \frac{\rho Q^2 A_1}{2} \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right) - \rho Q^2 \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right)$$



流体运动基本方程的简单应用

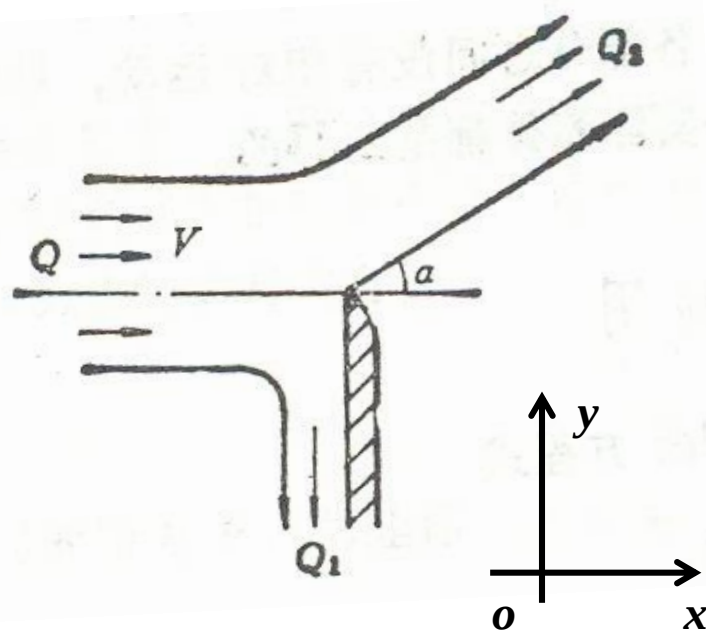
应用2： 将一平板伸到水柱内，板面垂直于水柱的轴线，水柱被截后的流动如图所示。已知水柱的流量 $Q = 0.036 \text{ m}^3/\text{s}$ ，水柱的来流速度 $V = 30 \text{ m/s}$ ，如被截取的流量 $Q_1 = 0.012 \text{ m}^3/\text{s}$ ，试确定水柱作用在板上的合力和水流的偏转角 α (略去水的重量及粘性)。

解：

不考虑重力，入口和出口压力都为大气压力，根据Bernoulli方程，可以得到： $V = V_1 = V_2 = 30 \text{ m/s}$ 。

由质量守恒，可以得到出口2的流量为：

$$Q_2 = Q - Q_1 = 0.036 - 0.012 = 0.024 \text{ m}^3/\text{s}$$





设平板对水柱的作用力为 R ，由动量定理知道，动量的变化等于流体所受的力，即：

在x方向：
$$-\rho QV + \rho Q_2 V_2 \cos \alpha = -R \quad (1)$$

在y方向：
$$-\rho Q_1 V_1 + \rho Q_2 V_2 \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

由(2)式得：
$$\sin \alpha = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{0.012}{0.024} = 0.5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

由(1)式得：

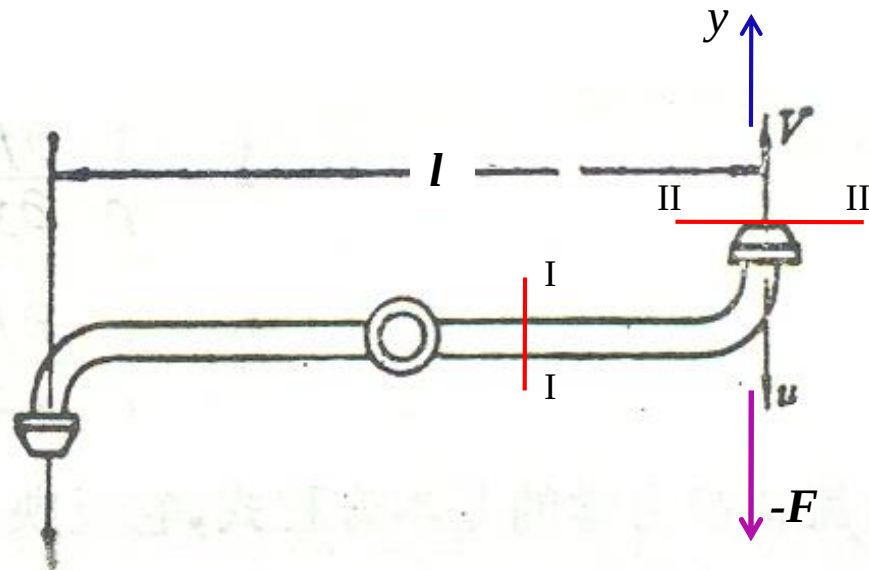
$$R = \rho(QV - Q_2 V_2 \cos \alpha) = 1000 \times (0.036 \times 30 - 0.024 \times 30 \times 0.867) = 455.76 \text{ N}$$

水柱对平板冲击力： $R' = -R \quad R' = 455.76 \text{ N}$



流体运动基本方程的简单应用

应用3: 水从长 $l = 0.6 \text{ m}$ 的喷管两端喷出，支承点在喷管的中心，相对喷管的出流速度 $V = 6 \text{ m/s}$ ，喷管直径 $d = 12.5 \text{ mm}$ 。试求 (1) 转臂不动时的转动力矩；(2) 转臂以周向速度 u 旋转时装置的功率表达式；(3) $V = 6 \text{ m/s}$ 时使功率为最大时的 u 值。



解: (1) 转臂不动时

取I-II两个断面之间的水流为控制体，假设喷管截面积为 A 。根据动量定理，喷嘴在 y 方向的作用力：

$$F = (\rho V A) V = \left(\rho V \frac{\pi}{4} d^2 \right) V = \frac{\pi}{4} \rho d^2 V^2$$

水流对喷嘴的反作用力为 $-F$ 。转动力矩：

$$T = -F \cdot l = -\frac{\pi}{4} \rho d^2 V^2 l = -\frac{\pi}{4} \times 1000 \times (0.0125)^2 \times 6^2 \times 0.6 = -2.65 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{顺时针}$$



(2) 转臂以周向速度 u 转动时，仍取I-II两个断面之间的流体为控制体，此时进出控制体的流量仍为 $\rho V \frac{\pi}{4} d^2$ ，但喷出的绝对速度为 $V-u$ ，根据动量定理，喷嘴在 y 方向的作用力：

$$F = \left(\rho V \frac{\pi}{4} d^2 \right) (V - u) = \frac{\pi}{4} \rho d^2 V (V - u)$$

水流给喷嘴的反作用力为 $-F$ 。转动力矩：

$$T = -F \cdot l = -\frac{\pi}{4} \rho d^2 V (V - u) l \quad \text{若 } V > u \text{ 则 } T \text{ 为顺时针。}$$

功率：

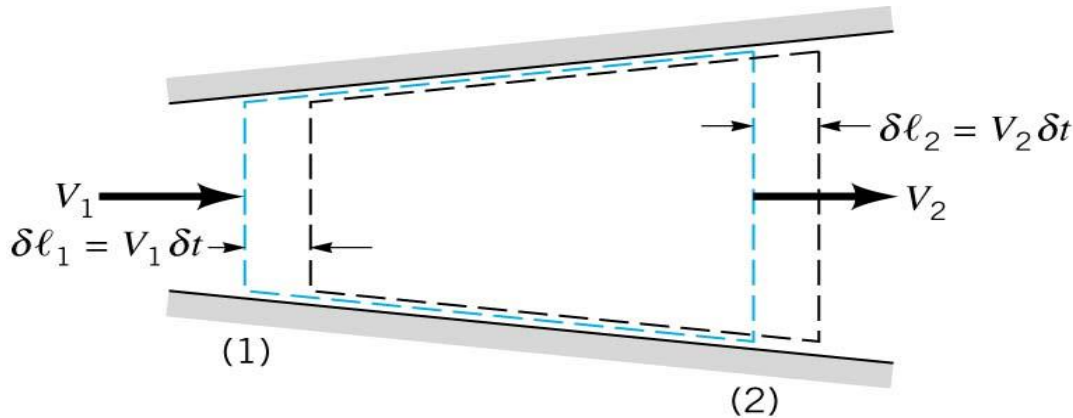
$$N = T \cdot \omega = T \cdot \frac{u}{l/2} = -\frac{\pi}{2} \rho d^2 V (V - u) u$$

(3) 使功率为最大的 u 值：

$$\frac{dN}{du} = -\frac{\pi}{2} \rho d^2 V^2 + \pi \rho d^2 V u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{V}{2} = 3 \text{ m/s}$$

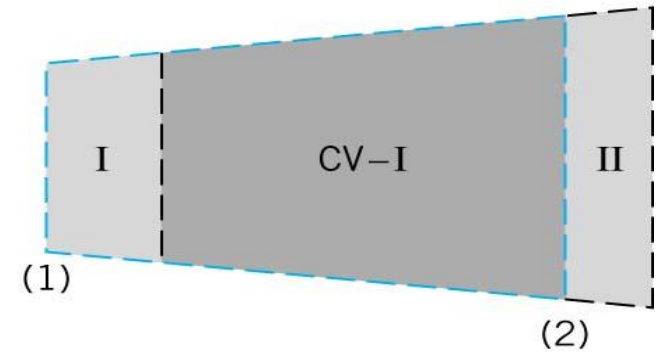


• 系统与控制体



- — — Fixed control surface and system boundary at time t
- — — System boundary at time $t + \delta t$

(a)



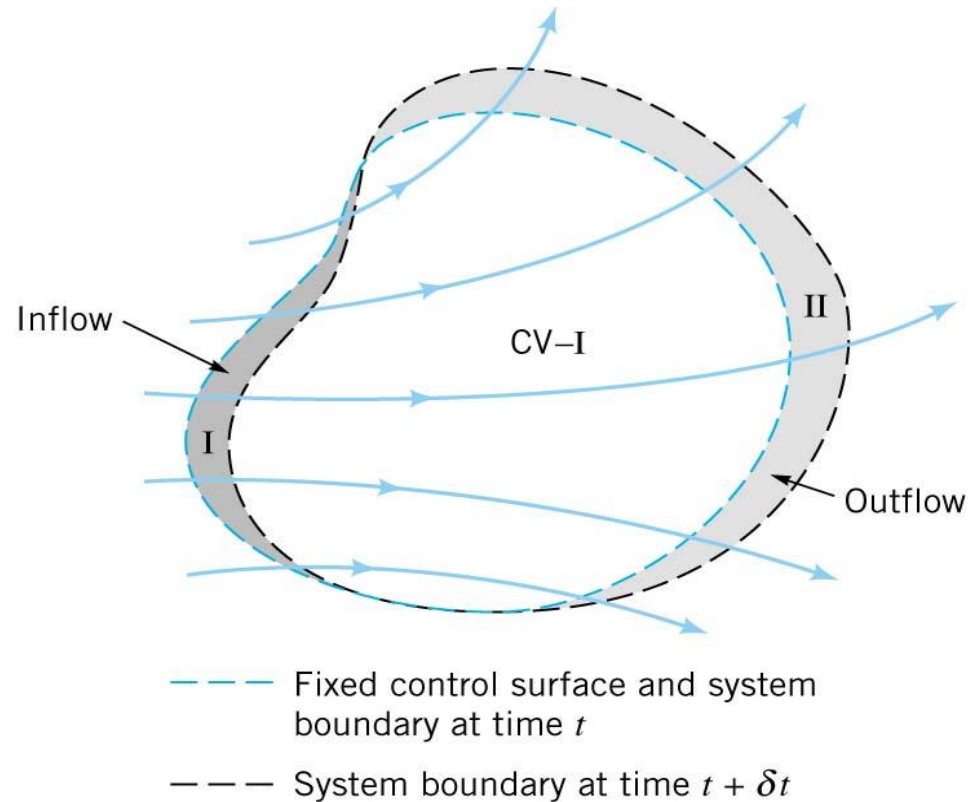
(b)



第四章要点

• 雷诺输运定理(RTT)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iiint_{MV} G dV \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} G dV + \iint_{CS} G \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$





第四章要点

- 连续方程(质量守恒方程)

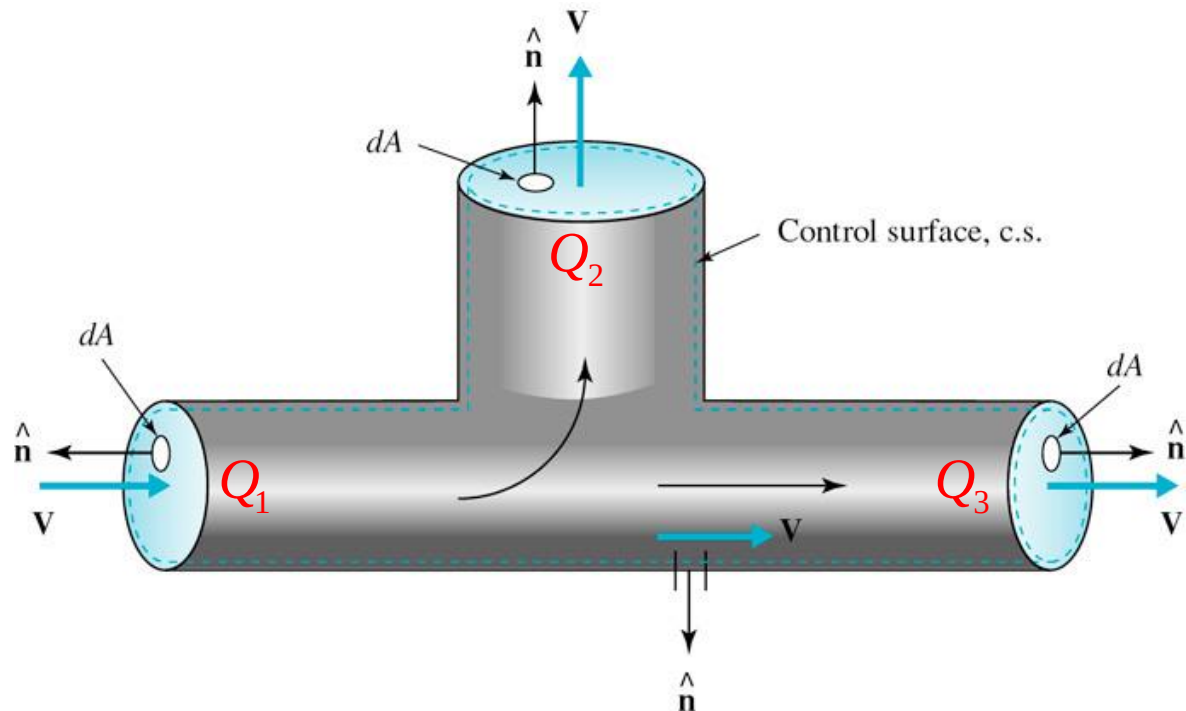
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

不可压缩流体: $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$

$$\oiint_{CS} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$





第四章要点

- **流函数：** 二维不可压流体的流动，均存在流函数。

$$\psi = \int -v dx + u dy \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \end{cases}$$

- **动量方程(动量守恒)**

$$\iiint_{MV} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dV = \iiint_{MV} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}) dV$$

积分形式的动量方程

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}$$

微分形式的动量方程



第四章要点

在实际工程问题中，可以推出简单实用的动量方程。

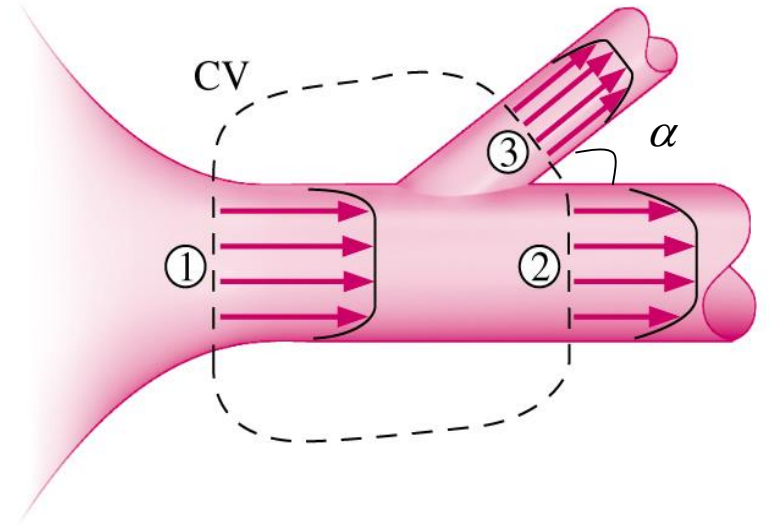
如图，根据**动量守恒**：控制体的动量变化率等于作用在控制体上的力，即：

$$F_x = -Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 \cos \alpha$$

$$F_y = Q_3 V_3 \sin \alpha$$

根据**质量守恒**：

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad \Rightarrow \quad \rho S_1 V_1 = \rho S_2 V_2 + \rho S_3 V_3$$



Q: 流量

V: 速度

S: 截面面积

F: 作用在CV流体上的力



第四章要点

- 不可压缩流体表面力与应变率关系(本构方程)

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

- 不可压缩流体运动的动量方程(动量守恒)

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g}$$

- 不可压缩流体运动的基本控制方程(Navier-Stokes方程)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{g} \end{cases}$$



- 不可压理想流体运动的动量方程(Euler方程)

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$$

- 不可压理想流体运动的动量方程(Lamb方程)

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - 2\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$$



第四章要点

- Bernoulli方程

理想不可压流体作定常流动， Bernoulli函数在同一条流线或涡线上为常数：

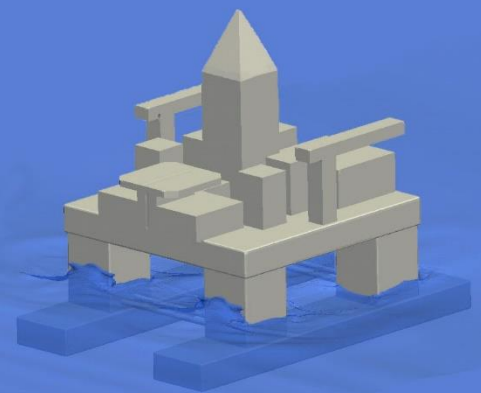
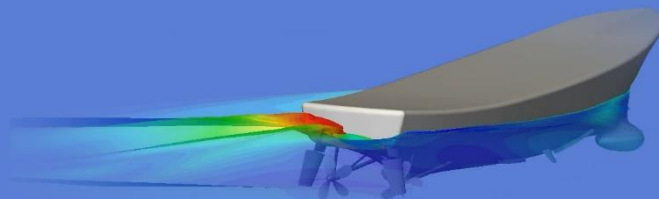
$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C_l = \text{const}$$

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = C_l = \text{const}$$

速度水头 + 压力水头 + 位置水头 = 常数

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

<http://dcwan.sjtu.edu.cn>



*部分素材来源于网络