上海交通大學 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主 讲 人：万德成

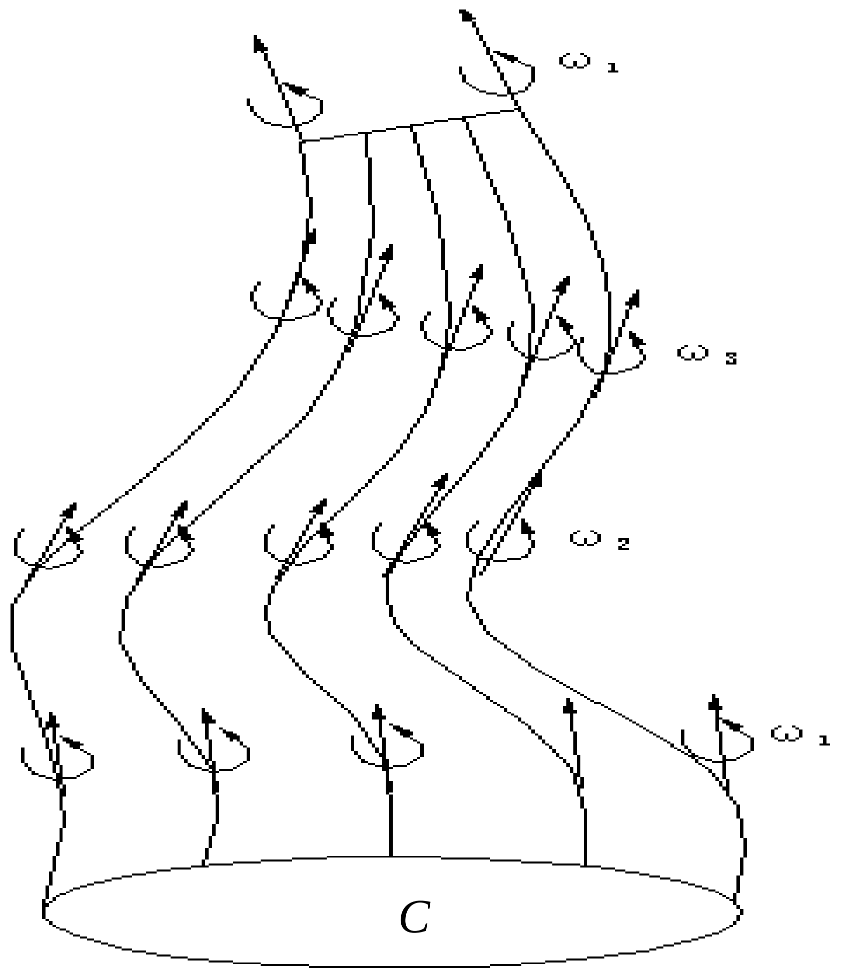
章节：第5章 流体旋涡运动

内容：5.2 旋涡强度、速度环量和Stokes定理

涡管和涡丝

涡管(vortex tube)定义：某一瞬时，在涡量场中任取一封闭曲线C(不是涡线)，通过曲线上每一点作涡线，这些涡线形成封闭的管形曲面。

涡管中充满着的作旋转运动的流体称为**涡束**，微元涡管中的涡束称为**微元涡束**或**涡丝 (vortex filament)**。

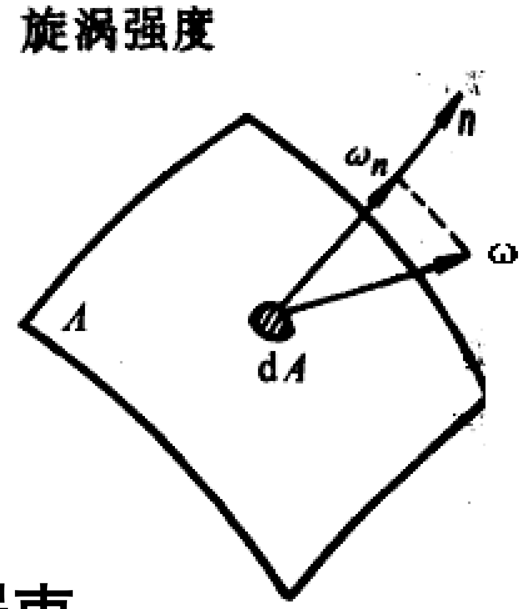


旋涡强度

旋涡强度，也称涡通量(vortex flux)，定义如下：

在微元涡管中，两倍旋转角速度与涡管断面面积dA的乘积称为微元涡管的涡通量(旋涡强度)，即

$$dJ = \mathbf{\Omega} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{2\omega} \cdot d\mathbf{A} = 2\cos(\mathbf{\omega} \cdot \mathbf{n})\, dA = 2\omega_n dA$$



对有限面积，则通过这一面积的涡通量应为：

$$J = \iint_A \mathbf{\Omega} \cdot dA = 2\iint_A \omega_n dA$$

如果面积A是涡束的某一横截面积，就称为涡束**旋涡强度**，它也是旋转角速度矢量的**通量**。旋涡强度不仅取决于旋度Ω，而且取决于面积A。

旋涡强度

涡线，涡管 ⟺ 流线，流管

涡通量（旋涡强度） ⟺ 流 量

?

Gauss 定理：

面积分 $\Leftrightarrow$ 体积分

$$\oiint_S (\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dS = \iiint_\Omega \nabla\cdot(\rho\mathbf{V})\,d\Omega$$

源汇强度

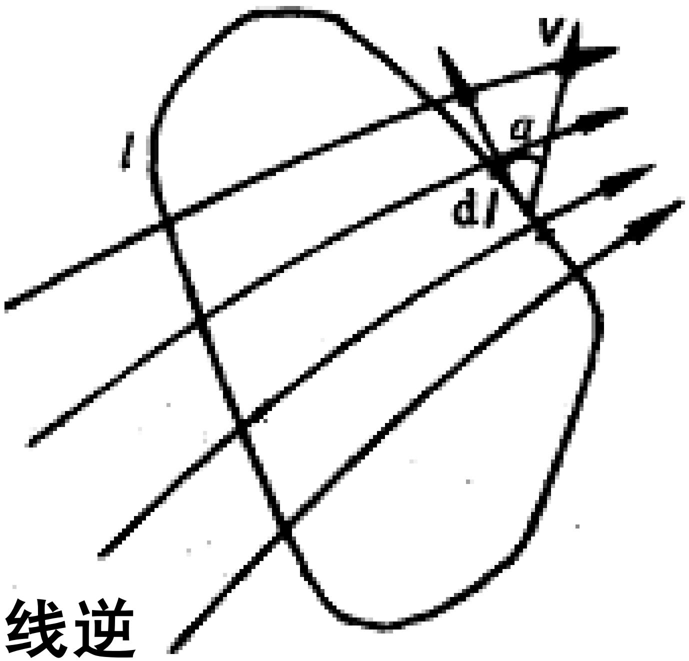
速度环量

速度环量(velocity circulation)定义：在流场的某封闭周线上，流体速度矢量沿周线的线积分，定义为速度环量，用符号 Γ 表示，即：

$$\Gamma_l = \oint_l \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l v \cdot \cos\alpha \, dl$$

α表示周线上某一点的速度矢量与该点切线方向的夹角。将上式写成标量积的形式为

$$\Gamma_l = \oint_l \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l (udx + vdy + wdz)$$



速度环量

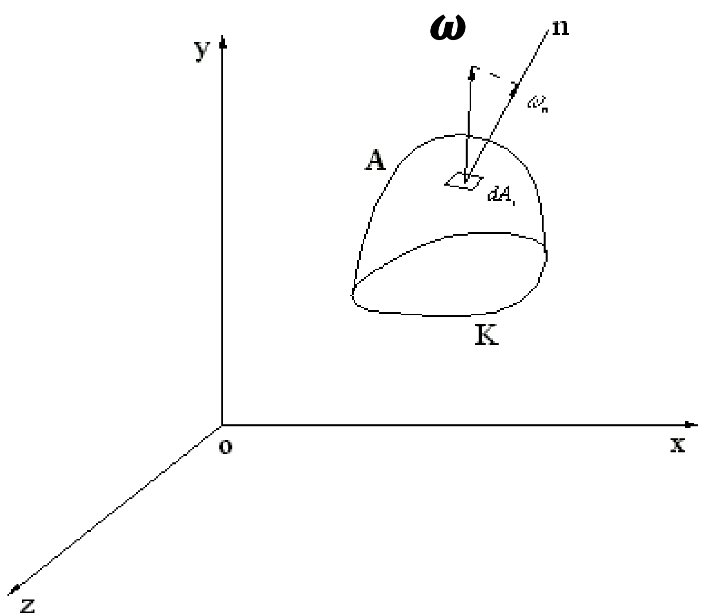
速度环量是标量，有正负号，规定沿曲线逆时针绕行的方向为正方向，沿曲线顺时针绕行的方向为负方向。对非定常流动，速度环量是一个瞬时的概念，应根据同一瞬时曲线上各点的速度计算，积分时为参变量。

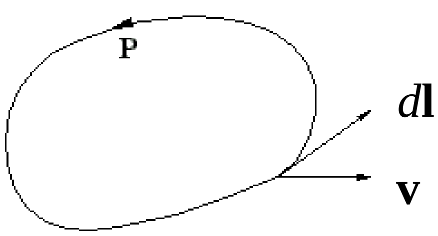
Stokes定理

Stokes定理: 在涡量场中，沿任意封闭周线的速度环量等于通过该周线所包围曲面面积的旋涡强度，即:

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \iint_A (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A} = \iint_A \mathbf{\Omega} \cdot d\mathbf{A} = 2\iint_A \omega_n dA = J$$

这一定理将旋涡强度与速度环量联系起来，给出了通过速度环量计算旋涡强度的方法。





Stokes定理

涡线，涡管 ⇔ 流线，流管

涡通量(旋涡强度) ⇔ 流　量

Stokes 定理：

线积分 ⇔ 面积分

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_A \left(\nabla \times \vec{v}\right) \cdot d\vec{A} = J$$

Gauss 定理：

面积分 ⇔ 体积分

$$\oiint_S (\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_\Omega \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\Omega$$

速度环量

源汇强度

Stokes定理

例题1：已知二维流场的速度分布为 $u=-3y$，$v=4x$ **，试求绕圆** $x^2+y^2=R^2$ **的速度环量。**

解：　此题用极坐标求解比较方便，坐标变换为：

$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta$$

速度变换为： $v_r=u\cos\theta+v\sin\theta \qquad v_\theta=v\cos\theta-u\sin\theta$

$$\Rightarrow \quad v_\theta=4r\cos^2\theta+3r\sin^2\theta$$

$$\Gamma=\int_0^{2\pi}v_\theta r\,d\theta=\int_0^{2\pi}(4r\cos^2\theta+3r\sin^2\theta)r\,d\theta$$

$$=r^2\int_0^{2\pi}(4\cos^2\theta+3\sin^2\theta)d\theta=6\pi r^2+r^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=7\pi r^2$$

Stokes定理

例题2：

已知一个二维涡量场，在一圆心在坐标原点、半径 $r=0.1m$ 的圆区域内，流体的涡通量 $J=0.4\pi\ m^2/s$。若流体微团在半径 r 处的速度分量 v_θ 为常数，它的值是多少？

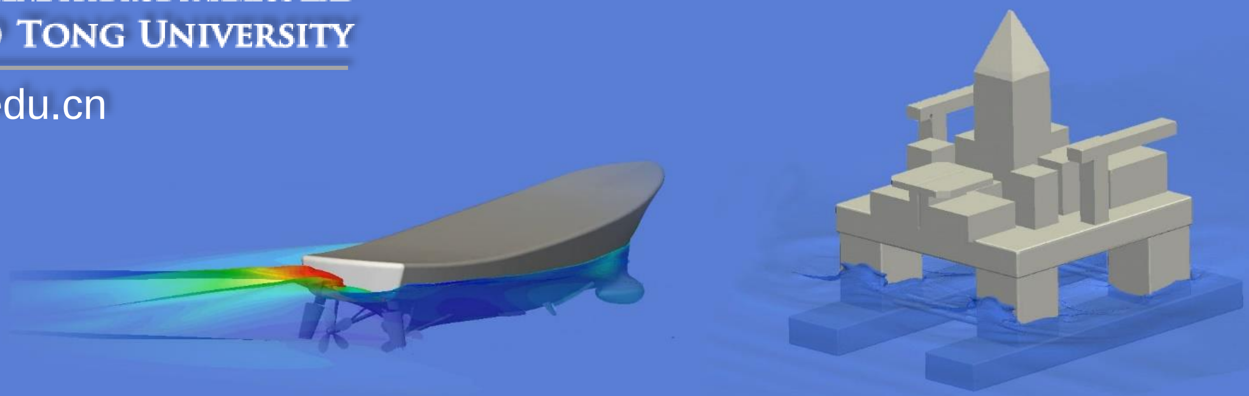
解：由Stokes定理得 ：

$$\Gamma=\int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = 2\pi r v_\theta = J$$

$$v_\theta=\frac{J}{2\pi r}=\frac{0.4\pi}{2\pi\times 0.1}=2m/s$$

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

http://dcwan.sjtu.edu.cn



*部分素材来源于网络