上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主 讲 人：万德成

章节：第5章 流体旋涡运动

内容：5.3 涡量场的空间特性和时间特性

涡量场的特性

- 涡量场的空间特性
- 涡量场的时间特性

涡量场的特性

涡量场的空间特性

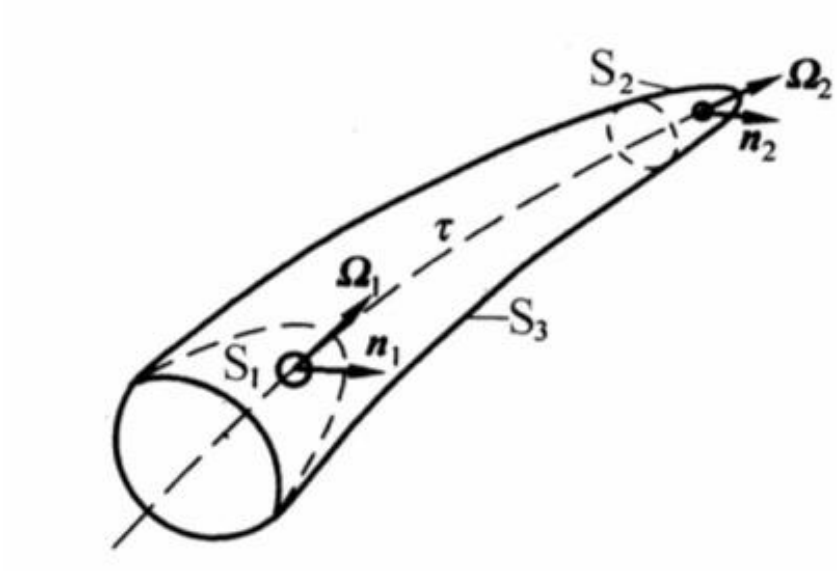
涡量场的空间特性

旋涡强度的空间特性

涡量： $\mathbf{\Omega} = 2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}$

由矢量公式，知道涡量的散度为0：

$$\nabla \cdot \mathbf{\Omega} = \nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{V} \right) = 0$$



因此： $\oiint_S \mathbf{\Omega} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{\Omega} dV$

$$= \iiint_V \nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{V} \right) dV = 0$$

表明通过任一封闭曲面的涡通量为0

涡量场的空间特性

因此：

1) 涡管中任一横截面上的涡通量（涡管强度）保持同一常数

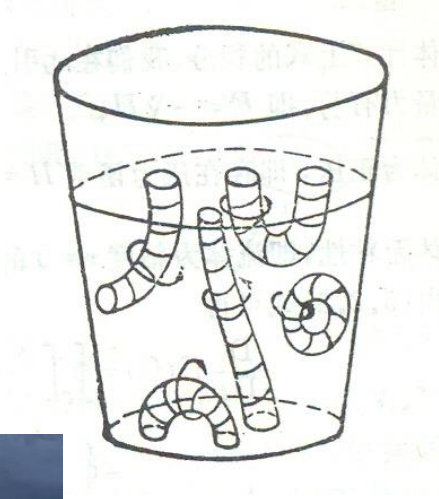
（Helmholtz第一定理，涡管强度守恒定理）

2) 涡管不能在流体中产生或消失

涡管的横截面积在流体中趋于0时，涡量将趋于无穷，这在物理上是不可能的。

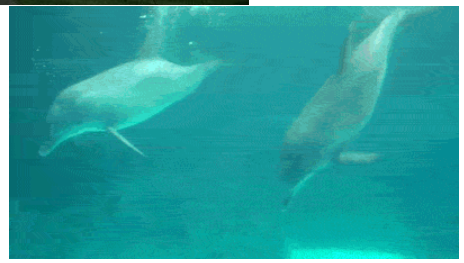
Hermann von Helmholtz
（1821-1894）

涡量场的空间特性



流场中的涡管只能有以下三种形式：

1) 两端都延伸到无穷远；
2) 形成封闭的涡环；
3) 中止于物面或其它界面。



涡量场的特性

涡量场的时间特性

涡量场的时间特性

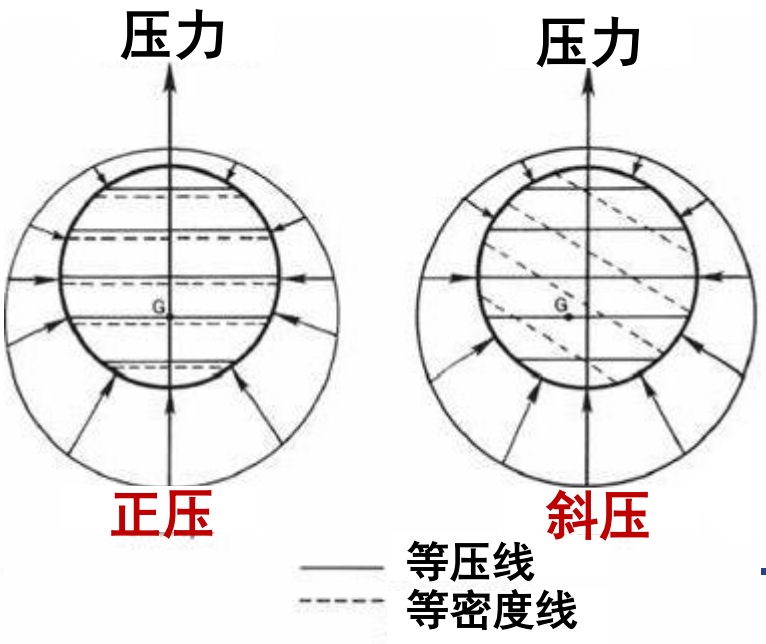
正压流体和斜压流体：

- 密度仅是压力函数的流体称为正压流体：

$$\rho = \rho(p) \Rightarrow \nabla\rho \times \nabla p = 0$$

- 密度是压力和温度的函数的流体称为斜压流体：

$$\rho = \rho(p, T) \Rightarrow \nabla\rho \times \nabla p \neq 0$$

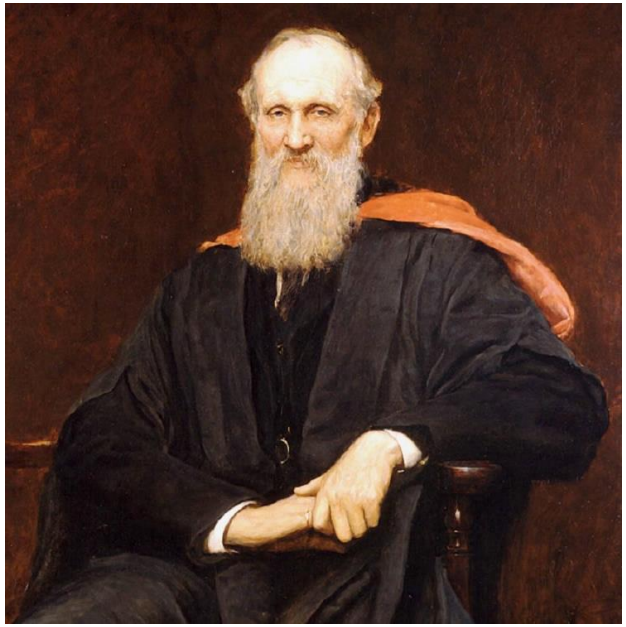


涡量场的时间特性

Thomson定理（也称为Kelvin定理）：

理想、不可压或正压流体，在有势的质量力作用下，沿任何封闭流体周线的速度环量不随时间变化，即：

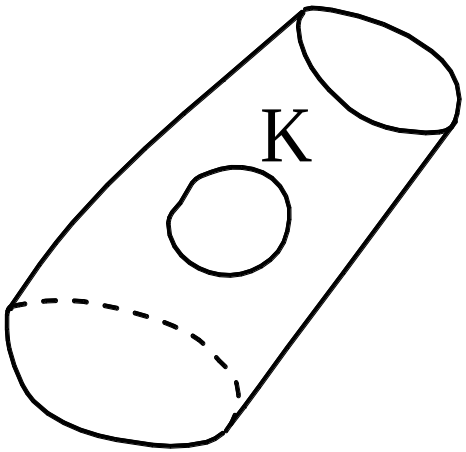
$$\frac{d\Gamma}{dt}=0$$



William Thomson
(Lord Kelvin, 1824-1907)

涡量场的时间特性

证明： 在流场中任取一由流体质点组成的封闭周线K，它随流体的运动而移动变形，但组成该线的流体质点不变。沿该线的速度环量的时间全导数为：



$$\frac{d\Gamma}{dt}=\frac{d}{dt}\oint(udx+vdy+wdz)$$

分步积分后为：

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\oint\left[u\frac{d}{dt}(dx)+v\frac{d}{dt}(dy)+w\frac{d}{dt}(dz)\right]+\oint\left(\frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz\right)$$

涡量场的时间特性

由于质点线K始终由同样的流体质点组成，所以

$$\frac{d}{dt}(dx)=du,\quad \frac{d}{dt}(dy)=dv,\quad \frac{d}{dt}(dz)=dw$$

因此方程左边第一项为：

$$\oint\left[u\frac{d}{dt}(dx)+v\frac{d}{dt}(dy)+w\frac{d}{dt}(dz)\right]=\oint[udu+vdv+wdw]$$

$$=\oint d(\frac{u^2+v^2+w^2}{2})=\oint d(\frac{V^2}{2})$$

涡量场的时间特性

由理想流体的欧拉动量方程，方程右边第二项可表示为：

$$\oint\left(\frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz\right)$$

$$=\oint\left[\left(f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)dx+\left(f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)dy+\left(f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)dz\right]$$

$$=\oint\left[\left(f_x dx+f_y dy+f_z dz\right)-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)\right]$$

$$=\oint\left(-df-\frac{1}{\rho}dp\right)=\oint\left[-df-d\left(\frac{p}{\rho}\right)\right]$$

涡量场的时间特性

整理上面的结果，可以得到：

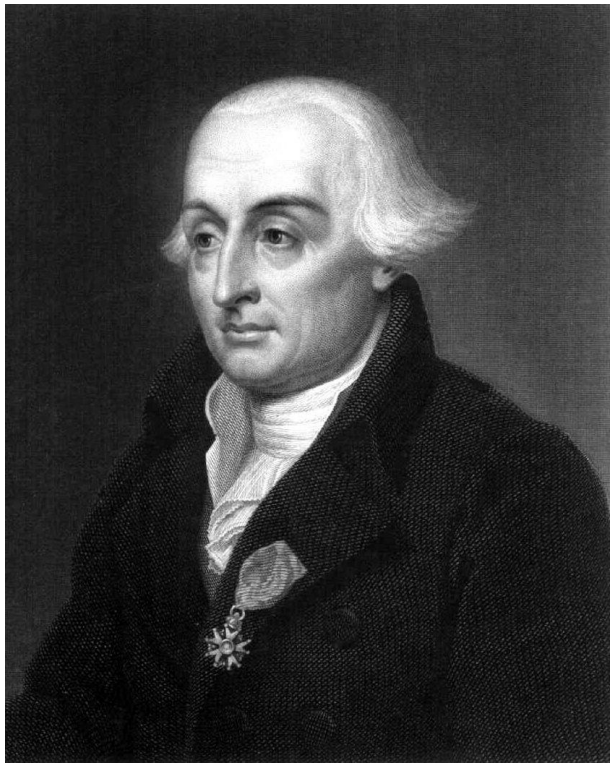
$$\frac{d\Gamma}{dt}=\oint d\left(\frac{V^2}{2}-f-\frac{p}{\rho}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma=\text{常数}$$

Kelvin定理(旋涡强度时间保持定理)：理想、不可压或正压流体，在有势的质量力作用下，沿任一封闭物质线的速度环量和通过任一物质面的涡通量在运动过程中恒定不变。

涡量场的时间特性

推论：（**Lagrange定理**，也称为**旋涡不生不灭定理**）理想、不可压或正压流体，在有势的质量力作用下，如果初始时刻在某部分流体是无旋的，则在以前或以后任一时刻中这部分流体始终无旋；反之，若有旋，则始终有旋。



Joseph-Louis Lagrange
(1736-1813)

涡量场的特性

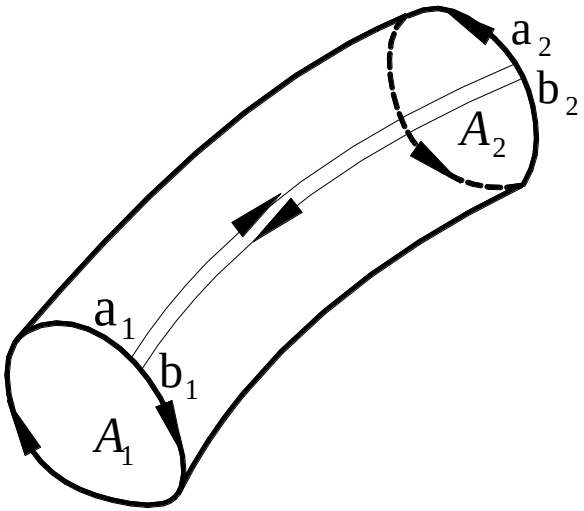
Helmholtz关于旋涡的三个定理

Helmholtz定理

Helmholtz关于理想、不可压或正压流体、质量力有势的旋涡运动的三个定理，解释了旋涡的基本性质，是研究理想流体有旋流动的基本定理。

1. Helmholtz第一定理（旋涡强度空间保持定理）：在理想、不可压或正压流体、 质量力有势的有旋流场中，同一涡管各截面上的旋涡强度相同。

在同一涡管上任取两截面A_1、A_2，在A_1、A_2之间的涡管表面上取两条无限靠近的线段a_1a_2和b_1b_2



Helmholtz定理

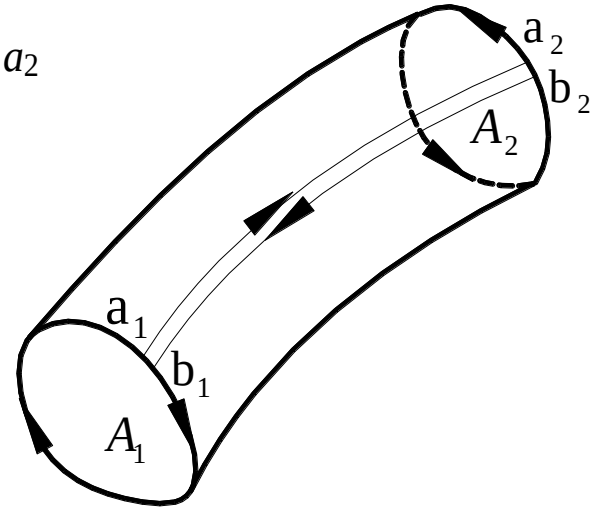
由于封闭周线$a_1a_2b_2b_1a_1$所围成的涡管表面无涡线通过，旋涡强度为零。根据Stokes定理，沿封闭周线的速度环量等于零，即：

$$\Gamma_{a_1a_2b_2b_1a_1} = \Gamma_{a_1a_2} + \Gamma_{a_2b_2} + \Gamma_{b_2b_1} + \Gamma_{b_1a_1} = 0$$

由于$\Gamma_{a_1a_2} + \Gamma_{b_2b_1} = 0$而 $\Gamma_{a_2b_2} = -\Gamma_{b_2a_2}$

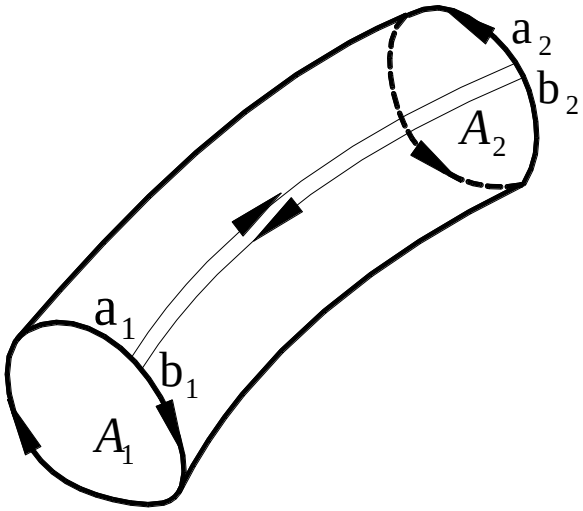
故得：

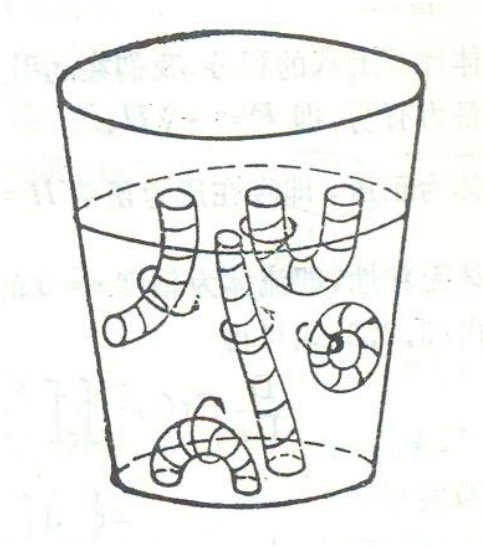
$$\Gamma_{b_1a_1} = \Gamma_{b_2a_2}$$



Helmholtz定理

同样该定理说明，在理想、不可压或正压流体、质量力有势的流体中，涡管既不能开始，也不能终止。但可以自成封闭的环形涡管，或开始于边界、终止于边界。





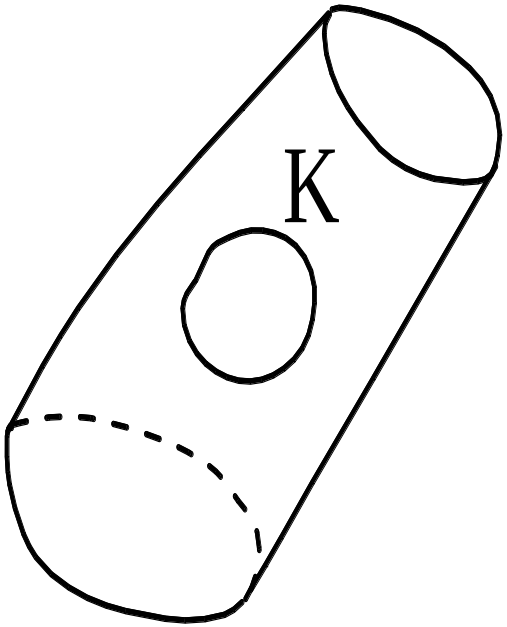
Helmholtz定理

2. Helmholtz第二定理（涡管保持定理）：理想、不可压或正压流体，在有势的质量力作用下，流场中的涡管始终由相同的流体质点组成。

K为涡管表面上的封闭周线，其包围的面积内涡通量等于零。由Stokes定理知，周线K上的速度环量应等于零；

又由Kelvin定理，K上的速度环量将永远为零，即周线K上的流体质点将永远在涡管表面上。

换言之，涡管上流体质点将永远在涡管上，即涡管是由相同的流体质点组成的，但其形状可能随时间变化。

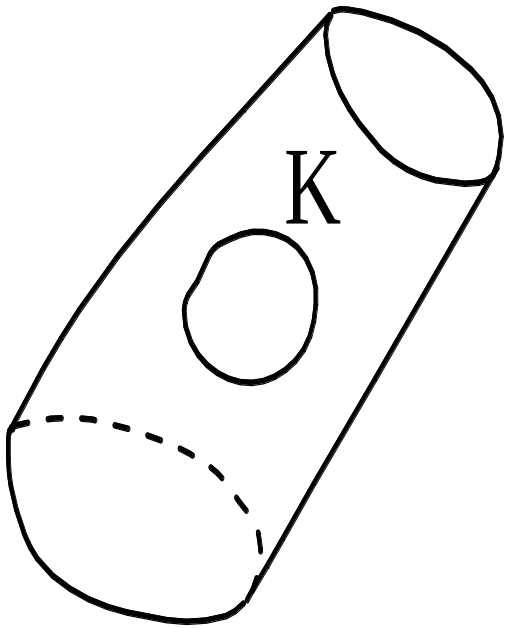


Helmholtz定理

推论：

1）**涡面保持定理：**在某一时刻组成涡面的流体质点在以前或以后任一时刻也永远组成涡面，即涡面是由相同的流体质点组成的，但其形状可能随时变化。

2）**涡线保持定理：**在某一时刻组成涡线的流体质点在以前或以后任一时刻也永远组成涡线，即涡线是由相同的流体质点组成的，但其形状可能随时变化。



Helmholtz定理

3. Helmholtz第三定理（涡管强度保持定理）：理想、不可压或正压流体，在有势的质量力作用下，任一涡管的旋涡强度不随时间变化。

若周线K为包围涡管任意的截面A的边界线。由Kelvin定理，该周线上的速度环量为常数。

根据Stokes定理，截面A上的旋涡强度为常数。

因为A为任意截面，所以整个涡管各个截面旋涡强度都不随时间发生变化，即涡管的旋涡强度不随时间变化。

但是，粘性流体的剪切应力将消耗能量，使涡管强度逐渐减弱。

总 结

涡量场的空间保持特性

通过任一封闭曲面的涡通量为零

- 涡管中任一横截面上的涡通量（旋涡强度）保持同一常数（Helmholtz第一定理）；
- 流场中的涡管不能在流体中产生或消失。

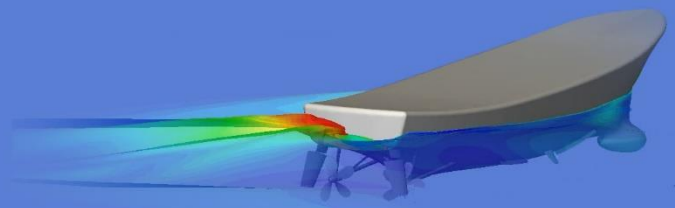
涡量场的时间保持特性

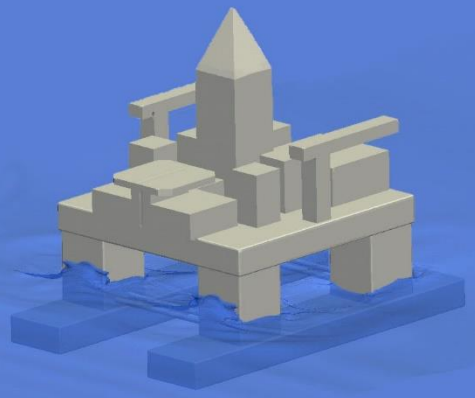
沿任一封闭物质线的速度环量在运动过程中恒定不变 (Kelvin定理)

- 旋涡不生不灭定理（Lagrange定理）
- 流场中的涡管、涡面和涡线始终由相同的流体质点组成（Helmholtz第二定理）。
- 涡管强度不随时间变化（旋涡强度时间保持定理，或Helmholtz第三定理）。

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

http://dcwan.sjtu.edu.cn





*部分素材来源于网络