



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主讲人：万德成

章节：第6章 理想流体的势流理论

内容：6.2 势流的线性叠加原理



势流的线性叠加原理

由于动力学条件与速度势和流函数并没有直接耦合，而且速度势和流函数都是调和函数，满足Laplace方程，加上运动学条件及其他条件都是线性算子，因此速度势和流函数都满足下面的**线性叠加原理 (Linear Superposition)**：

几个简单有势流动叠加得到的新的有势流动，其速度势和流函数分别等于原有几个有势流动的速度势和流函数的代数和，速度分量为原有速度分量的代数和。

势流的线性叠加原理的意义：将简单的势流叠加起来，得到新的复杂流动的速度势和流函数，可以用来求解复杂流动。



势流的线性叠加原理

设有两个平面势流，其速度势为 ϕ_1 和 ϕ_2 ，则

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = 0$$

两个速度势之和将代表一个新的不可压缩流体平面势流，其速度势：

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$



势流的线性叠加原理

因为
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (\phi_1 + \phi_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\phi_1 + \phi_2)}{\partial y^2}$$
$$= \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} \right) = 0$$

即速度势叠加结果，代表一新的复合平面流动，其速度分量：

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = u_{x1} + u_{x2}$$

$$u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = u_{y1} + u_{y2}$$

同样可证明，新的复合流动的流函数：

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

势流的线性叠加原理

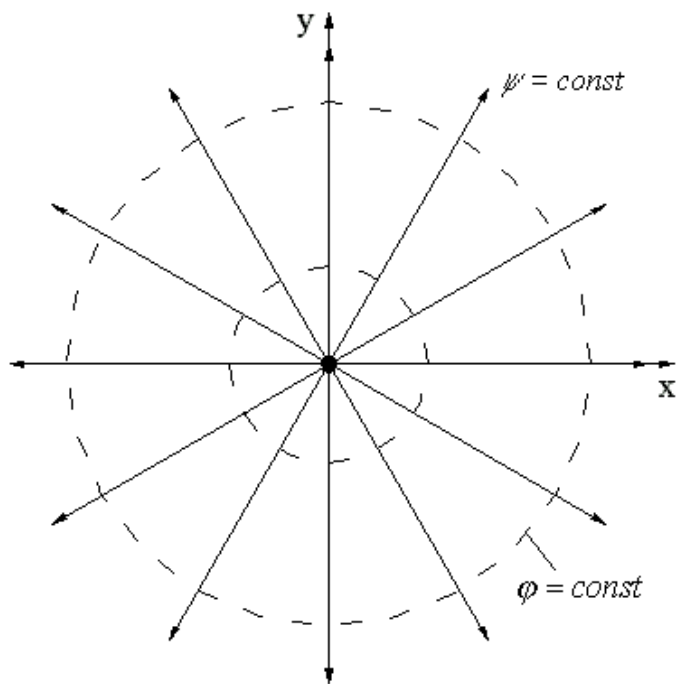
点源和点汇

对二维:

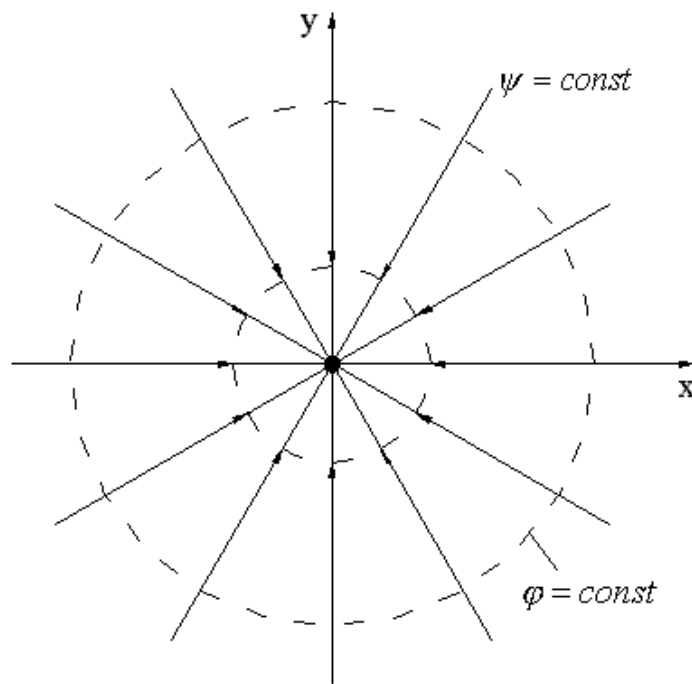
$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{m}{2\pi} \theta$$

对三维:

$$\phi = \frac{m}{4\pi r}$$



点源



点汇

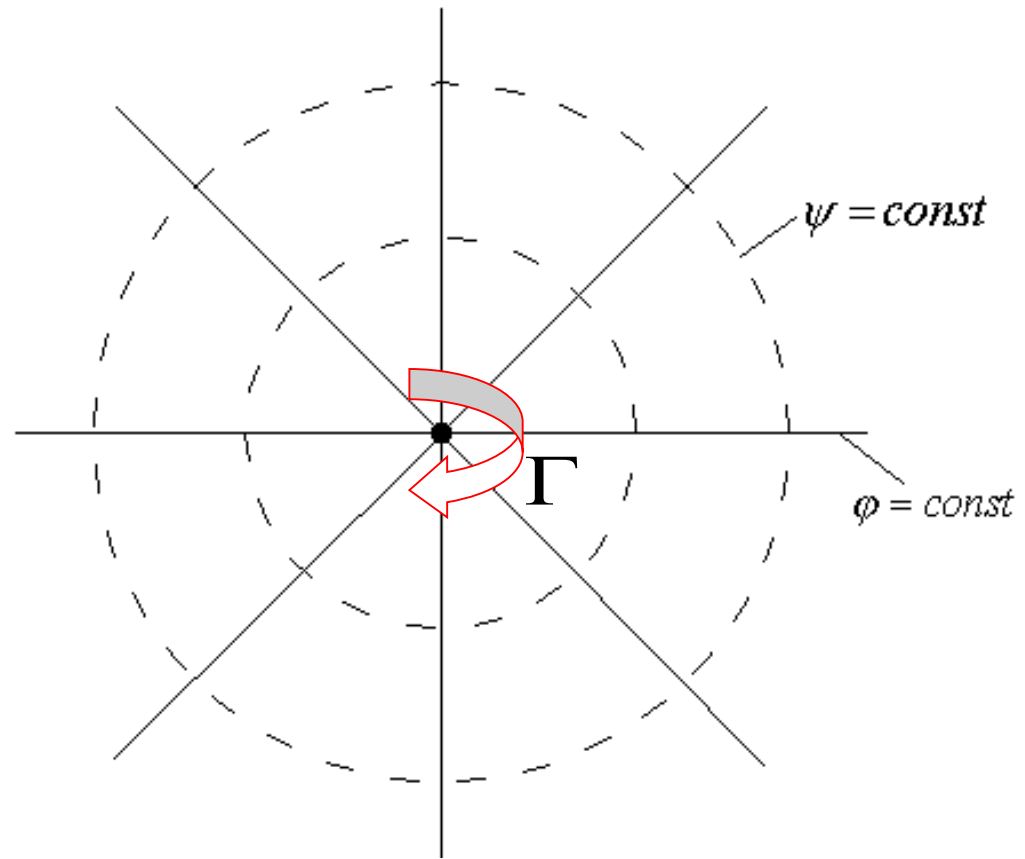


势流的线性叠加原理

点涡:

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

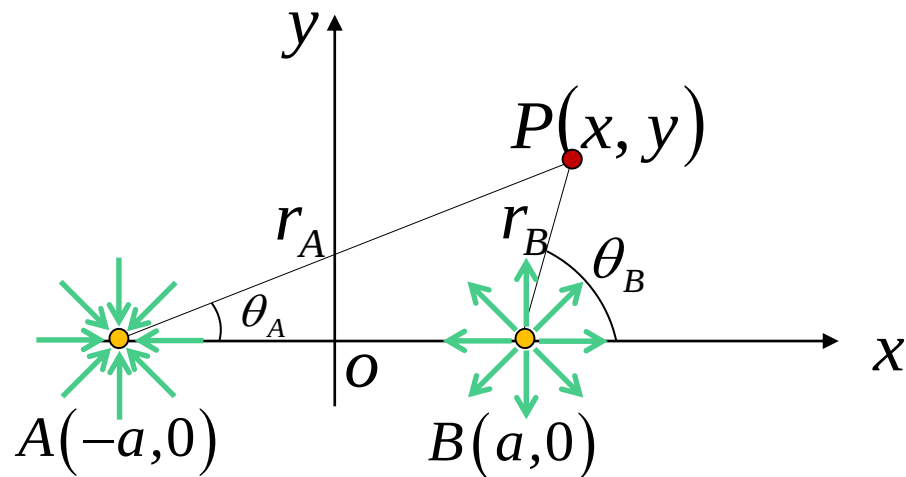




势流的线性叠加原理

例子1：点源与点汇的叠加——偶极子流

若将位于A $(-a, 0)$ 的点汇，强度为 Q ，与位于B $(a, 0)$ 等强度的点源叠加。令 ϕ_1 和 ϕ_2 ， ψ_1 和 ψ_2 分别为点汇与点源的速度势和流函数，求叠加后某点 $P(x, y)$ 的速度势。



解： 根据线性叠加原理，二维点源与点汇的叠加后的速度势为：

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_1 + \phi_2 = \frac{Q}{2\pi} \ln r_B - \frac{Q}{2\pi} \ln r_A \\ &= \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_A}{r_B} = \frac{Q}{4\pi} \ln \frac{y^2 + (x-a)^2}{y^2 + (x+a)^2} = \frac{Q}{4\pi} \ln \left[1 + \frac{-4xa}{(x+a)^2 + y^2} \right]\end{aligned}$$

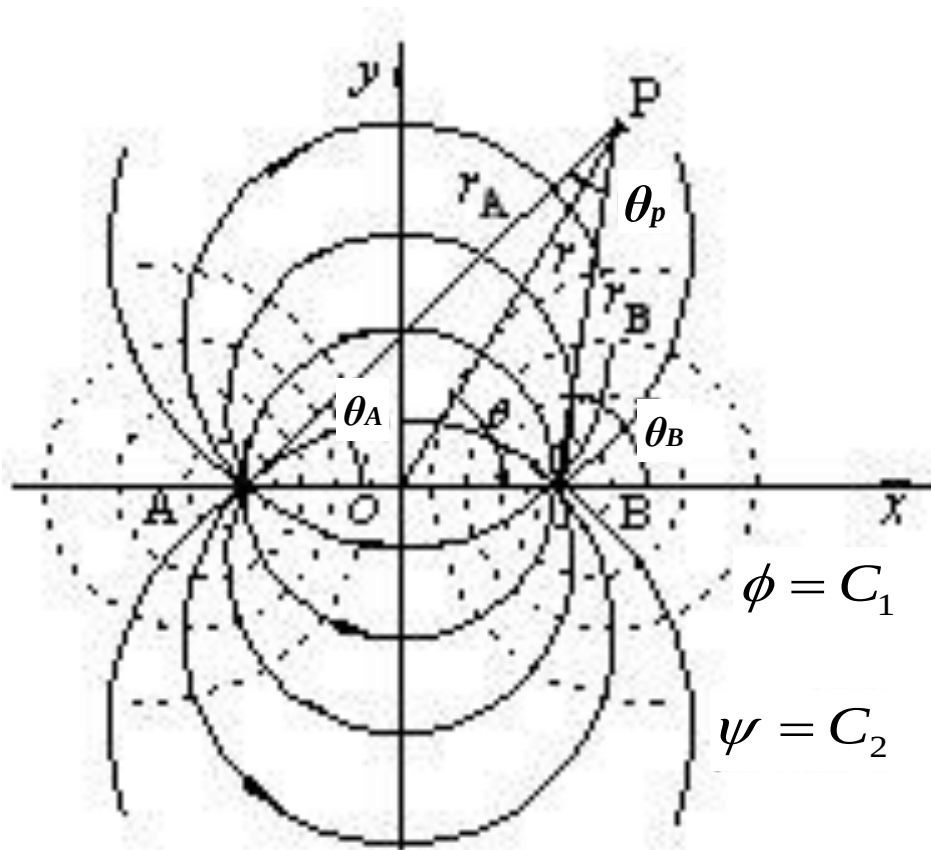


势流的线性叠加原理

流函数为：

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{Q}{2\pi} (\theta_B - \theta_A) \\ &= \frac{Q}{2\pi} \theta_p \\ &= \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}\end{aligned}$$

θ_p 是AP、BP之间的夹角，在流线上 $\psi = \text{常数}$ ， $\theta_p = \text{常数}$ 。
其图像为经过源点和汇点的圆线族。

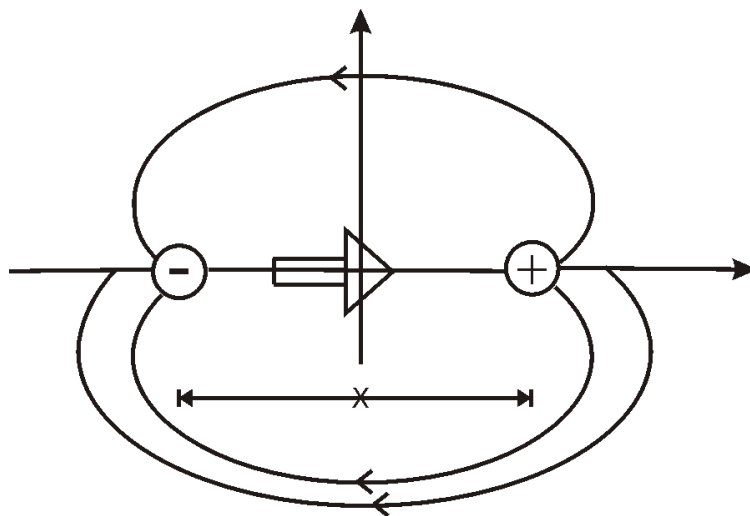




势流的线性叠加原理

当 $a \rightarrow 0$ 时，源点和汇点无限接近，流量为无限增大，使得

$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} Q \cdot 2a = M$ 取有限值，称这种流动为**偶极子流(Doublet flow, Dipole)**。M为偶极子矩，其方向由**汇点指向源点**。





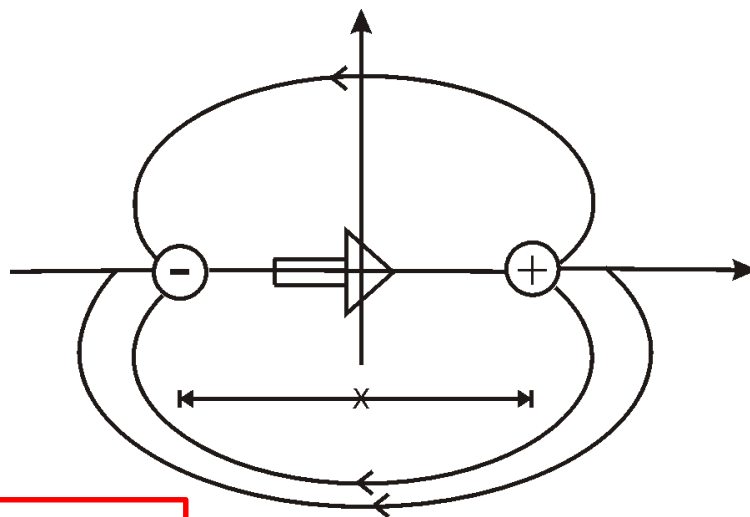
势流的线性叠加原理

数学中，当 ε 为微量时，有：

$$\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2 / 2 + \varepsilon^3 / 3 - \dots \approx \varepsilon$$

类似地，可得二维偶极子流的速度势为：

$$\begin{aligned}\phi &= \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} \left\{ \frac{Q}{4\pi} \ln \left[1 + \frac{-4xa}{(x+a)^2 + y^2} \right] \right\} \\ &= \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} \left[-\frac{Q}{4\pi} \frac{4xa}{(x+a)^2 + y^2} \right]\end{aligned}$$



即

$$\phi = -\frac{M}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2)} = -\frac{M}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}$$



势流的线性叠加原理

对速度势求偏导数，得出的二维偶极子流的速度分布为：

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{M}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{M}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r^2}$$

二维偶极子流的流函数为：

$$\psi = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} \left(\frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} \left(\frac{Q}{2\pi} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)$$

即

$$\psi = \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}$$



势流的线性叠加原理

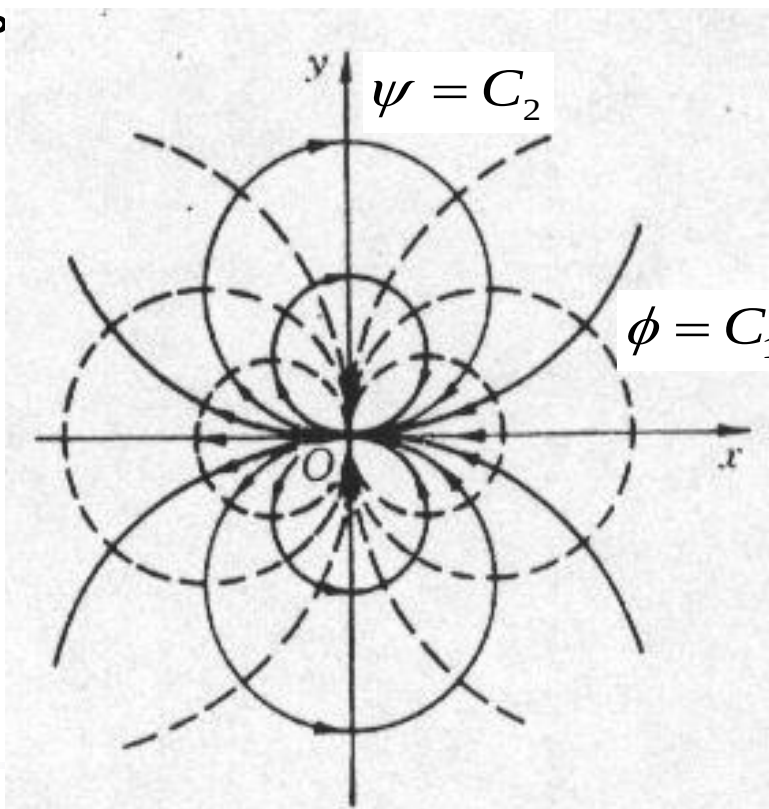
令 ϕ 为常数 C_1 ，得等势线方程：
$$\left(x + \frac{M}{4\pi C_1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{4\pi C_1}\right)^2$$

即：等势线的图像为圆心在 $\left(-\frac{M}{4\pi C_1}, 0\right)$ 点上，半径为 $\left|\frac{M}{4\pi C_1}\right|$ 并与 y 轴在原点相切的圆族，即图中虚线。

令 ψ 为常数 C_2 ，得流线方程：

$$x^2 + \left(y - \frac{M}{4\pi C_2}\right)^2 = \left(\frac{M}{4\pi C_2}\right)^2$$

即流线的图像是圆心为 $\left(0, \frac{M}{4\pi C_2}\right)$ ，半径为 $\left|\frac{M}{4\pi C_2}\right|$ ，并与 x 轴在原点相切的圆族，即图中实线。





势流的线性叠加原理

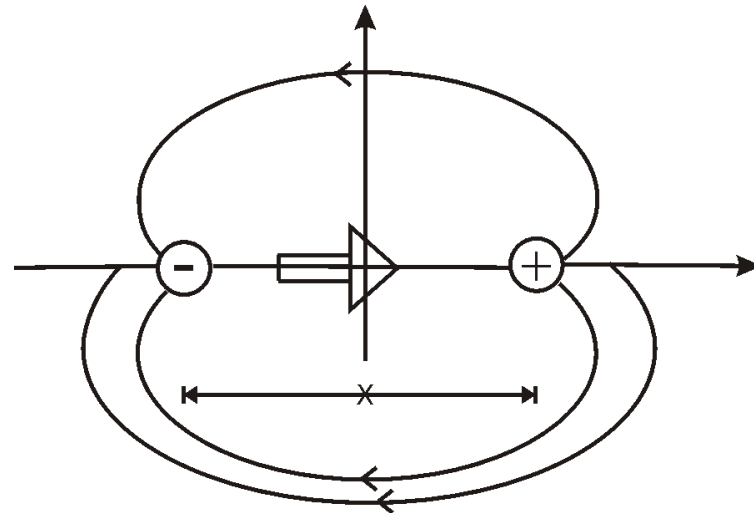
也可以从另一途径和直角坐标系来得到二维偶极子流的速度势：

$$\begin{aligned}\phi &= \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} (\phi_1 + \phi_2) = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} \left[\frac{Q}{2\pi} \left(\ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right) \right] \\ &= -\frac{M}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = -\frac{M}{2\pi} \frac{x}{r^2}\end{aligned}$$

这里 M 是偶极子矩： $\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} Q \cdot 2a = M$

同样可以得到二维偶极子流的速度势为：

$$\phi = -\frac{M}{2\pi} \frac{x}{r^2}$$





势流的线性叠加原理

如果是三维点源与点汇的叠加，则得三维偶极子流的速度势：

$$\begin{aligned}\phi &= \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} (\phi_1 + \phi_2) = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} \left[-\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right) \right] \\ &= -\frac{M}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{M}{4\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{M}{4\pi} \frac{x}{r^3}\end{aligned}$$

这里 M 是偶极子矩： $\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} Q \cdot 2a = M$

所以三维偶极子流的速度势为：

$$\phi = \frac{M}{4\pi} \frac{x}{r^3}$$



势流的线性叠加原理

例子2：点源与点涡的叠加—螺旋流。

若将位于坐标原点的点源，强度为 Q ，与同样位于坐标原点的点涡叠加，旋涡强度为 Γ 。令 ϕ_1 和 ϕ_2 ， ψ_1 和 ψ_2 分别为点源与点涡的速度势和流函数，求叠加后的速度势和流函数。

解：

点源的速度势和流函数：

$$\begin{cases} \phi_1 = -\frac{Q}{2\pi} \ln r \\ \psi_1 = -\frac{Q}{2\pi} \theta \end{cases}$$

点涡的速度势和流函数：

$$\begin{cases} \phi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi_2 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \end{cases}$$



势流的线性叠加原理

根据线性叠加原理，点源与点涡的叠加后的速度势和流函数分别为：

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{1}{2\pi} (Q \ln r - \Gamma \theta)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{1}{2\pi} (Q \theta + \Gamma \ln r)$$



势流的线性叠加原理

令以上的速度势和流函数为常数，得到的等势线和流线方程分别为：

$$r = C_1 e^{\frac{\Gamma}{Q}\theta}$$

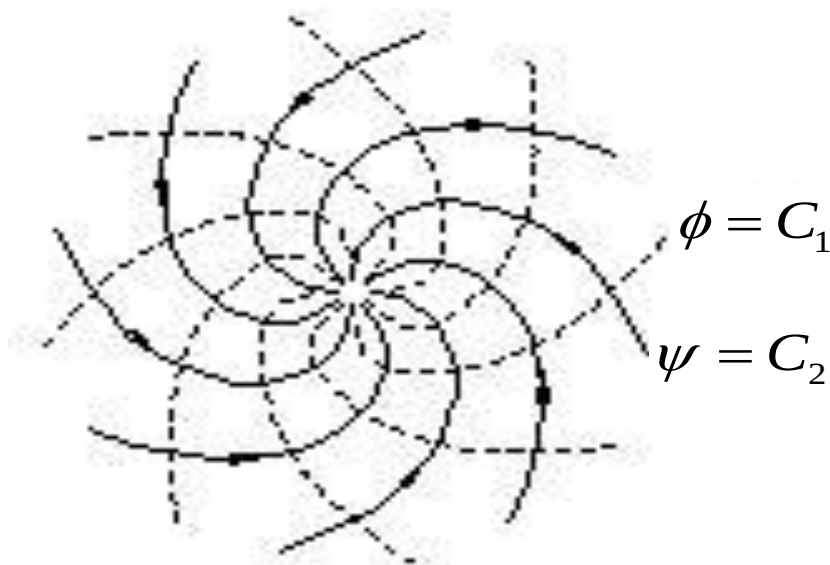
$$r = C_2 e^{-\frac{Q}{\Gamma}\theta}$$

等势线和流线是两组相互正交的对数螺旋线，故称点源和点涡叠加的流动为**螺旋流(spiral flow)**。

螺旋流的速度分布为：

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{Q}{2\pi r}$$

$$V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$





上海交通大学

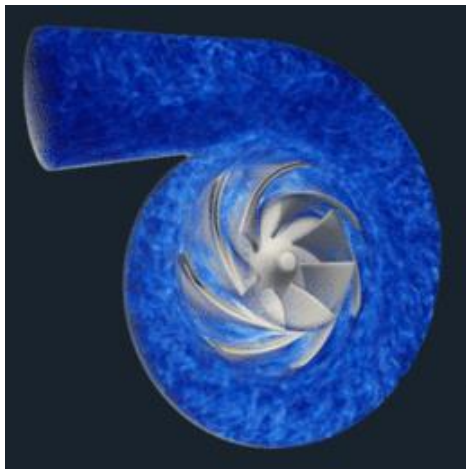
Shanghai Jiao Tong University

势流的线性叠加原理

螺旋流的工程实例：



波轮洗衣机内的
旋转水流



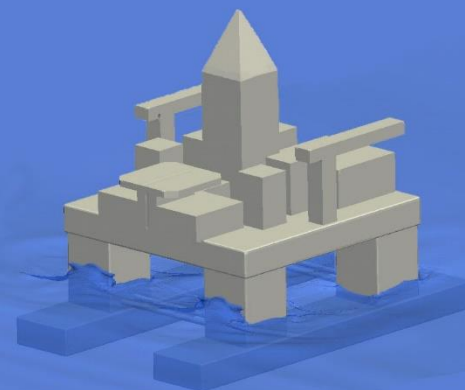
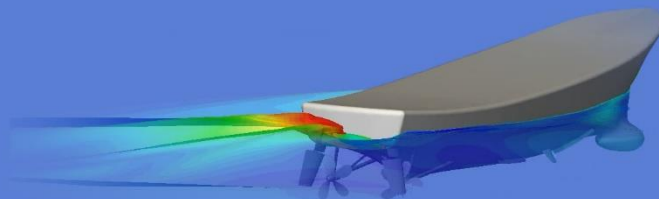
水泵叶轮内流体的流动



屋顶自然通风器空气的流动

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

<http://dcwan.sjtu.edu.cn>



*部分素材来源于网络