



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主讲人：万德成

章节：第6章 理想流体的势流理论

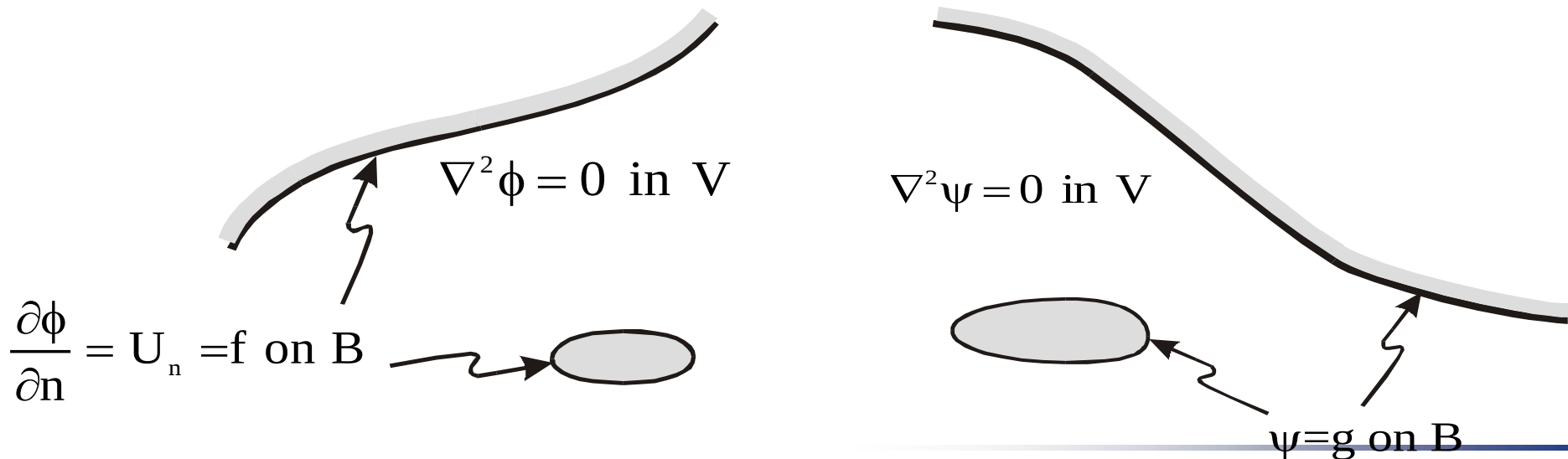
内容：6.3 物体绕流的势流流动



物体绕流的势流流动

前面的讨论，都是无限域的势流叠加问题，在流场中没有物体存在。如果流场中存在物体，根据势流运动的基本控制方程知道，这时就需要满足运动学条件，即物面条件。

如果通过简单势流叠加后的速度势和流函数能满足物面条件，那么简单势流叠加得到的速度势和流函数，就是物体绕流势流流动的速度势和流函数。



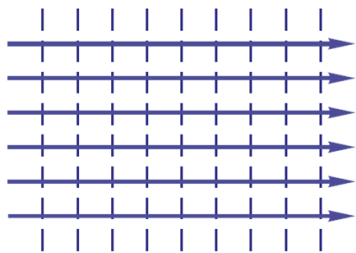


物体绕流的势流流动

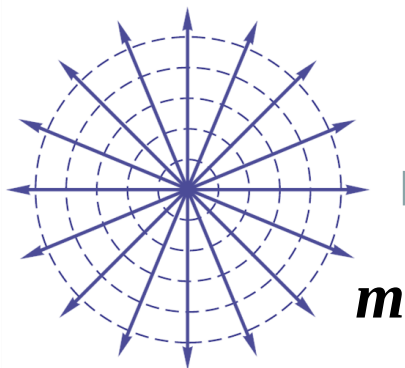
例子1：二维均匀流与二维点源的叠加

——绕二维半无限长物体的势流流动 (Rankine Half-body)

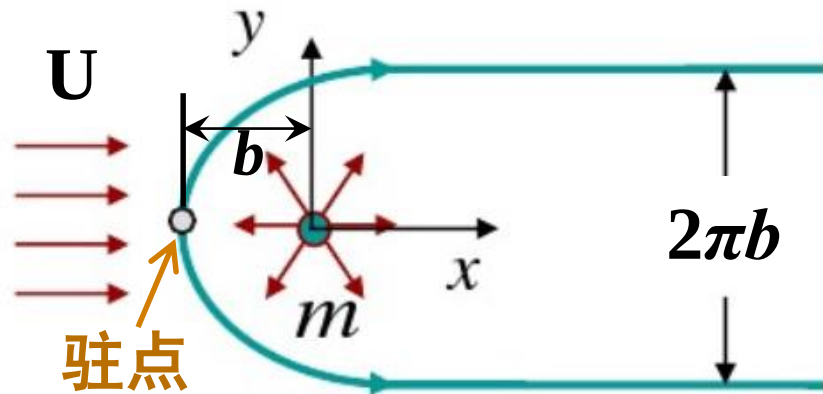
U



均匀流



点源



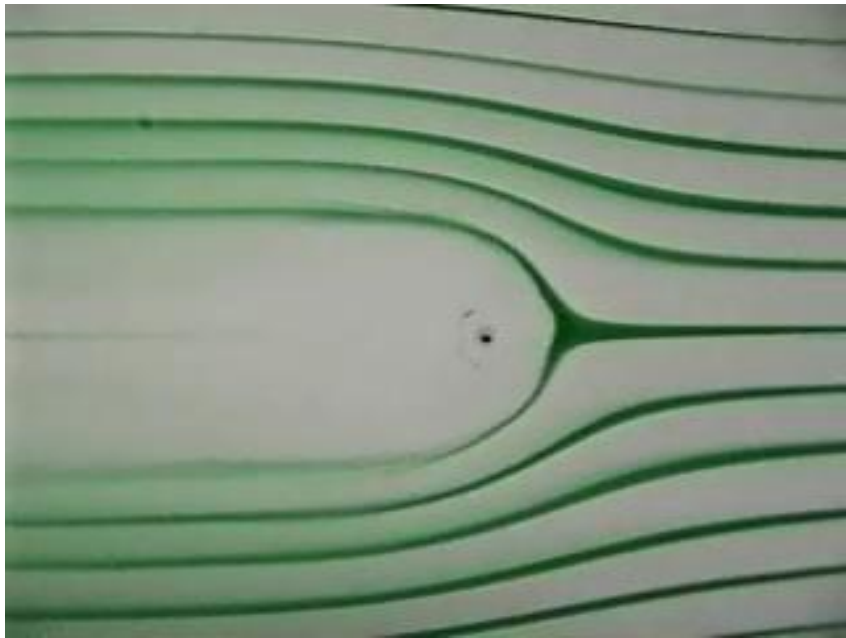
半无限长物体
(Rankine半体)



上海交通大学

Shanghai Jiao Tong University

物体绕流的势流流动



William Rankine
(1820-1872)

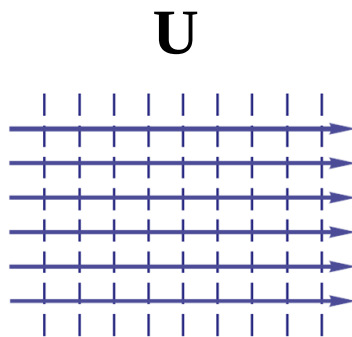


物体绕流的势流流动

解： 沿 x 方向的均匀流 ($u = U, v = 0$) 的速度势和流函数为：

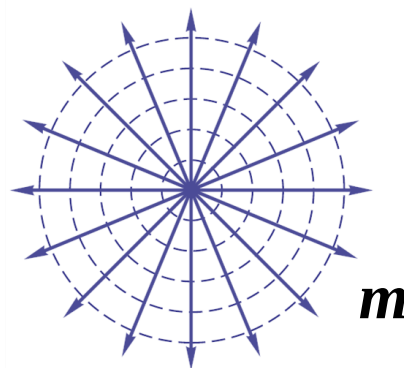
均匀流：

$$\begin{cases} \phi_1 = Ur \cos \theta \\ \psi_1 = Ur \sin \theta \end{cases}$$



点源：

$$\begin{cases} \phi_2 = \frac{m}{2\pi} \ln r \\ \psi_2 = \frac{m}{2\pi} \theta \end{cases}$$





物体绕流的势流流动

因此，均匀流与点源叠加后的速度势和流函数为：

$$\phi = Ur \cos \theta + \frac{m}{2\pi} \ln r \quad \psi = Ur \sin \theta + \frac{m}{2\pi} \theta$$

速度分布为： $V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \cos \theta + \frac{m}{2\pi r}$, $V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U \sin \theta$

流线方程为： $\psi = Ur \sin \theta + \frac{m}{2\pi} \theta = C$

常数 C 取不同值代表不同的流线，其中物面流线的一部分为该流场绕流物体的轮廓线。



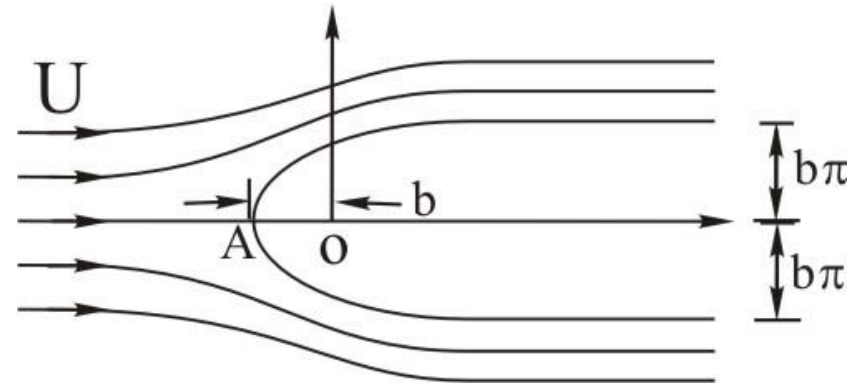
物体绕流的势流流动

物面流线的左半支是负 x 轴的一部分($\theta = \pi$), **驻点** $A(-b, 0)$ 的速度为零:

$$V_{r, \theta=\pi} = \left(U \cos \theta + \frac{m}{2\pi r} \right)_{\theta=\pi} = -U + \frac{m}{2\pi b} = 0$$

得:

$$b = \frac{m}{2\pi U}$$



通过驻点 $A(-b, 0)$ 的右半部分物面流线, 由 A 点的流函数值决定:

$$\psi_{A, \theta=\pi} = \left(U r \sin \theta + \frac{m}{2\pi} \theta \right)_{\theta=\pi} = \frac{m}{2}$$



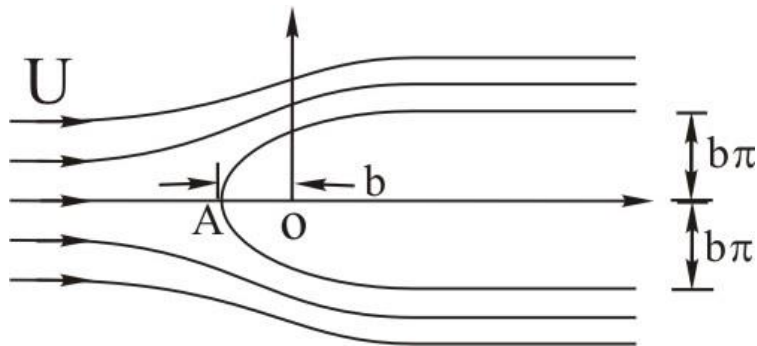
物体绕流的势流流动

因此物面流线方程为：
$$Ur \sin \theta + \frac{m}{2\pi} \theta = \frac{m}{2}$$

即

$$r = \frac{m}{2\pi U} \frac{\pi - \theta}{\sin \theta} = \frac{b(\pi - \theta)}{\sin \theta}$$

物面流线及部分流线如图所示，右半部分所围区域称为
兰金（Rankine）半体。



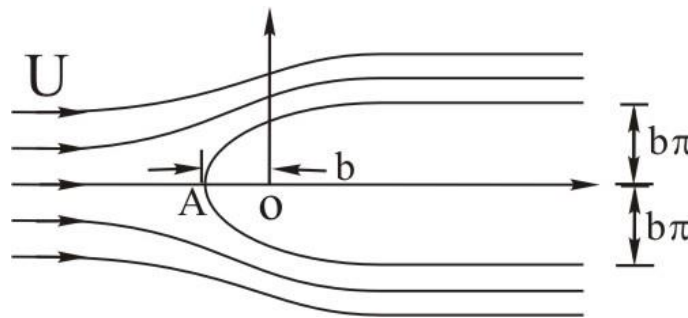


物体绕流的势流流动

在无穷远处 $\theta \rightarrow 0$ 和 2π ，物面上下两支流线趋于平行。

由上式可确定两支流线距x轴的距离分别为：

$$y_0 = (r \sin \theta) \Big|_{\theta=0, 2\pi} = \left[b(\pi - \theta) \right] \Big|_{\theta=0, 2\pi} = \pm b\pi = \pm \frac{m}{2U}$$





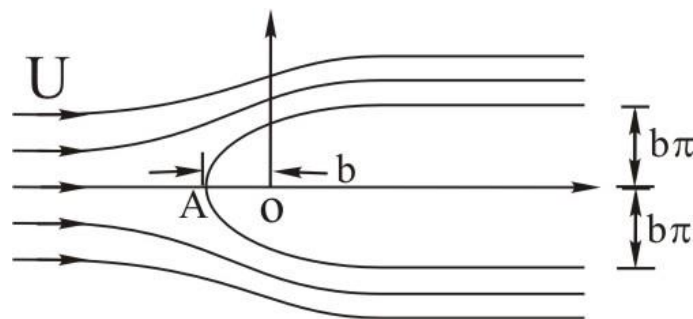
物体绕流的势流流动

也可以从直角坐标来分析，均匀流和点源叠加后的速度势为：

$$\phi = Ur \cos \theta + \frac{m}{2\pi} \ln r = Ux + \frac{m}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

速度场为：

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = U + \frac{m}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$





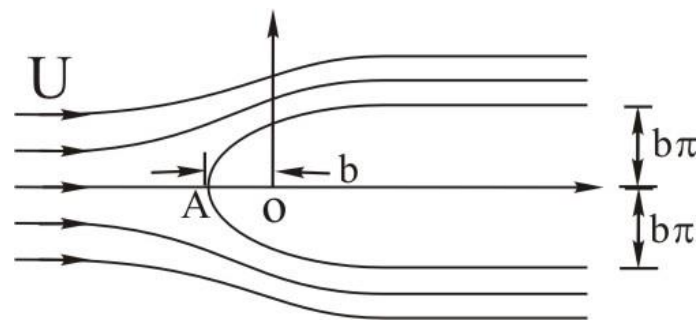
物体绕流的势流流动

驻点A的速度：

$$u \Big|_{x=x_A, y=0} = U + \frac{m}{2\pi x_A} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_A = -\frac{m}{2\pi U}$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时， $u \rightarrow U$ ，物面形成了一个流管。根据质量守恒知道流管流量为 m ，即：

$$2|y_0|U = m \quad \Rightarrow \quad y_0 = \pm \frac{m}{2U}$$



驻点位置和物面上下流线都与点源强度成正比，与均匀流速度成反比：

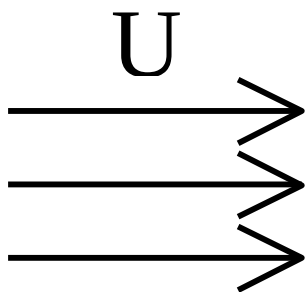
速度越大或强度越小，驻点位置离原点越近，半无限体越细长



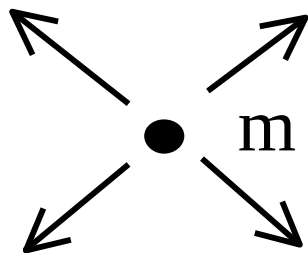
物体绕流的势流流动

例子2：三维均匀流与三维点源的叠加

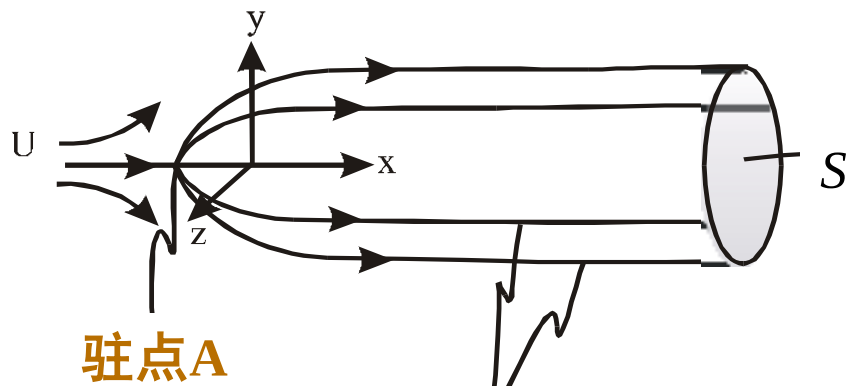
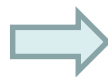
——绕三维半无限长物体的势流流动 (Rankine Half-body)。



均匀流



点源



驻点A

物面流线



物体绕流的势流流动

从直角坐标来分析，三维均匀流和点源叠加后的速度势为：

$$\phi = Ux - \frac{m}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

速度场为：

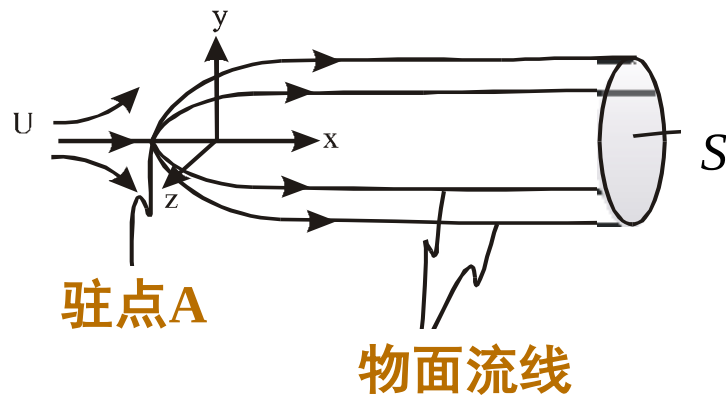
$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = U + \frac{m}{4\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

驻点A的速度：

$$u \Big|_{x=x_A, y=z=0} = U + \frac{m}{4\pi} \frac{x_A}{|x_A|^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_A = -\sqrt{\frac{m}{4\pi U}}$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时， $u \rightarrow U$ ，物面形成了一个流管，流管横截面面积为 S ，根据质量守恒知道流管流量为 m ，即：

$$S \cdot U = m \quad \Rightarrow \quad S = \frac{m}{U}$$





物体绕流的势流流动

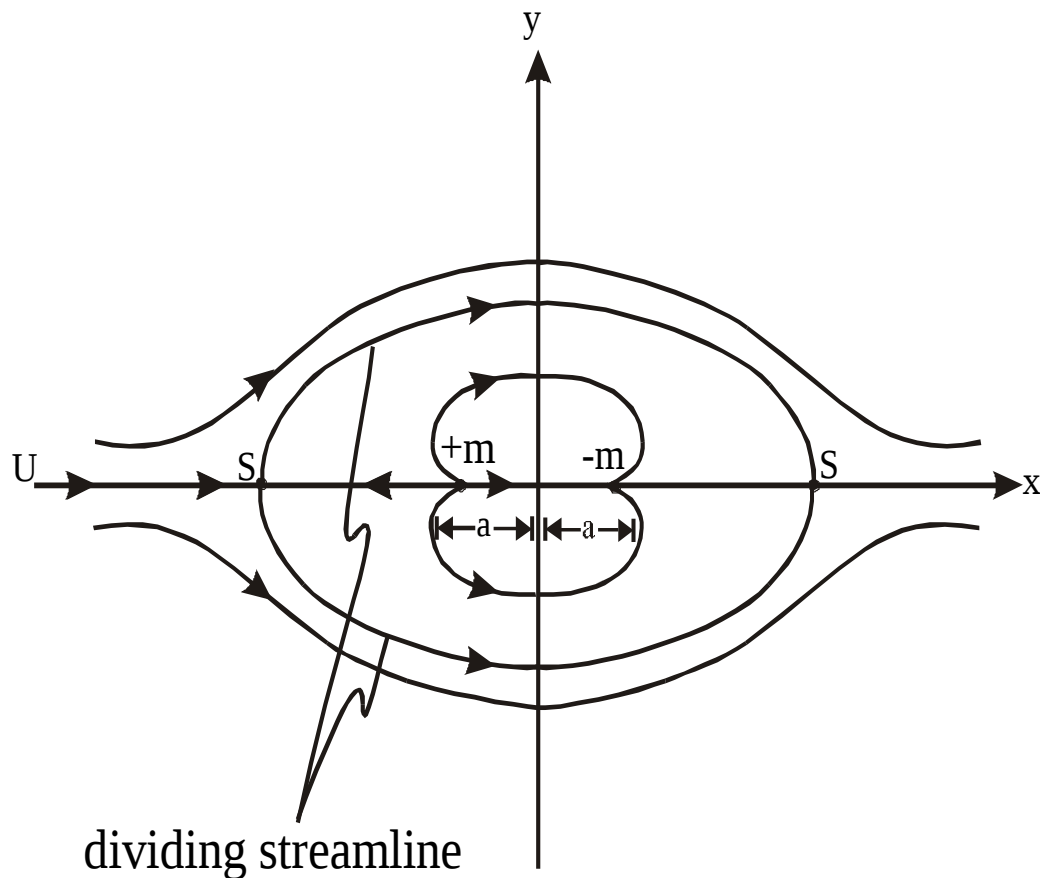
例子3：三维均匀流与三维点源、点汇的叠加

——绕三维封闭物体的势流流动(Rankine Closed-body)。

要想得到封闭的物面，就必须保证在物面上的源汇强度为零，即：

$$\sum_{\text{in body}} m = 0$$

因此，可采用均匀流与相同强度的点源、点汇叠加。





物体绕流的势流流动

三维均匀流和点源、点汇叠加后的速度势为：

$$\phi = Ux - \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

速度场为：

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = U + \frac{m}{4\pi} \left[\frac{x+a}{\left((x+a)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}} - \frac{x-a}{\left((x-a)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}} \right]$$

驻点S的速度：

$$u \Big|_{x=x_S, y=z=0} = U + \frac{m}{4\pi} \left[\frac{1}{(x_S + a)^2} - \frac{1}{(x_S - a)^2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(x_S^2 - a^2 \right)^2 = \left(\frac{m}{4\pi U} \right) 4ax_S$$



物体绕流的势流流动

在 $x = 0$ 面上的速度分布：

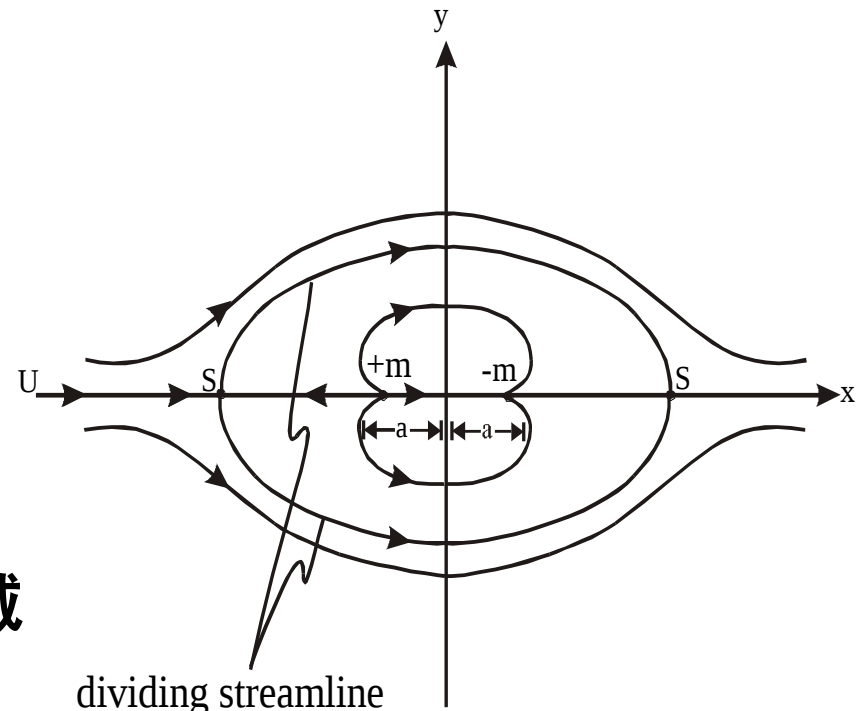
$$u|_{x=0} = U + \frac{m}{4\pi} \frac{2a}{(a^2 + R^2)^{3/2}},$$

这里 $R^2 = y^2 + z^2$

物体的半径 R_0 可以由下式确定：

$$2\pi \int_0^{R_0} u|_{x=0} R dR = m$$

物面流线如图所示，物面所围区域称为**兰金（Rankine）封闭物体**。





物体绕流的势流流动

例子4：二维均匀流与二维偶极子流的叠加

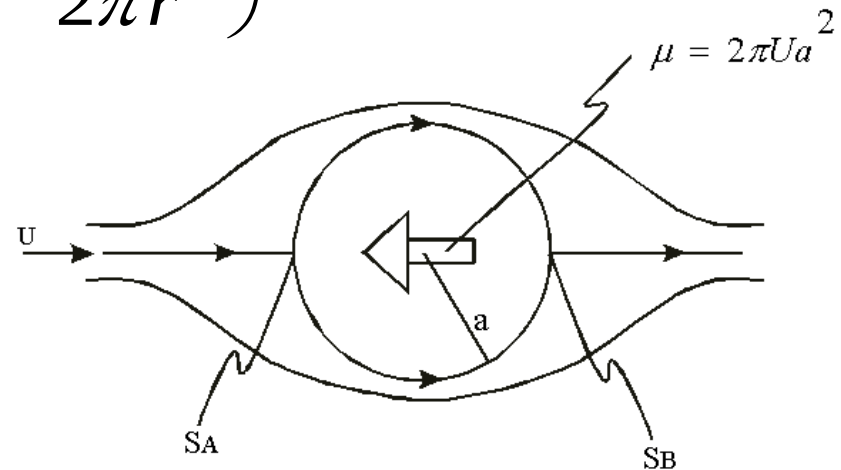
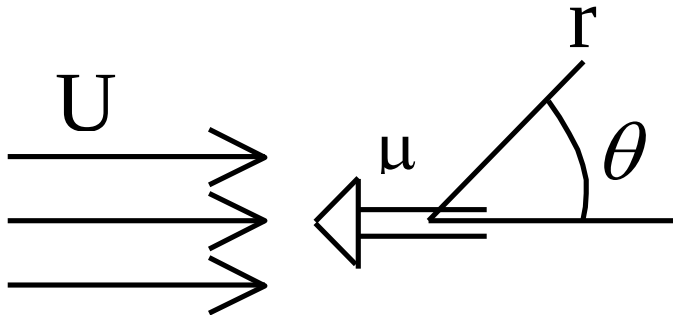
——绕二维圆柱的势流流动(circle)。

二维均匀流和偶极子流叠加后的速度势为：

$$\phi = Ux + \frac{\mu x}{2\pi r^2} = \cos \theta \left(Ur + \frac{\mu}{2\pi r} \right)$$

速度场为：

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \cos \theta \left(U - \frac{\mu}{2\pi r^2} \right)$$



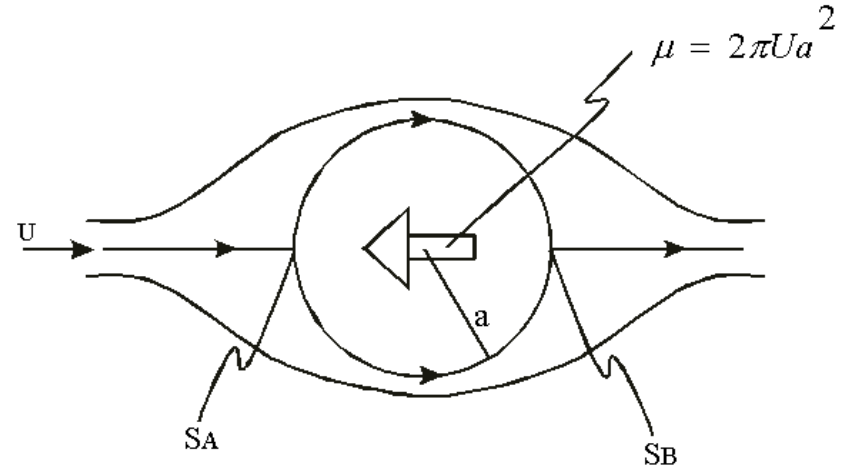


物体绕流的势流流动

为了满足物面条件，需要在 $r = a$ (a 为圆柱半径) 上， $V_r = 0$ ，即：

$$V_r \Big|_{r=a} = \cos \theta \left(U - \frac{\mu}{2\pi r^2} \right) \Big|_{r=a} = 0$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi U}} \quad \text{or} \quad \mu = 2\pi U a^2$$



因此，绕二维圆柱的势流流动的速度势为：

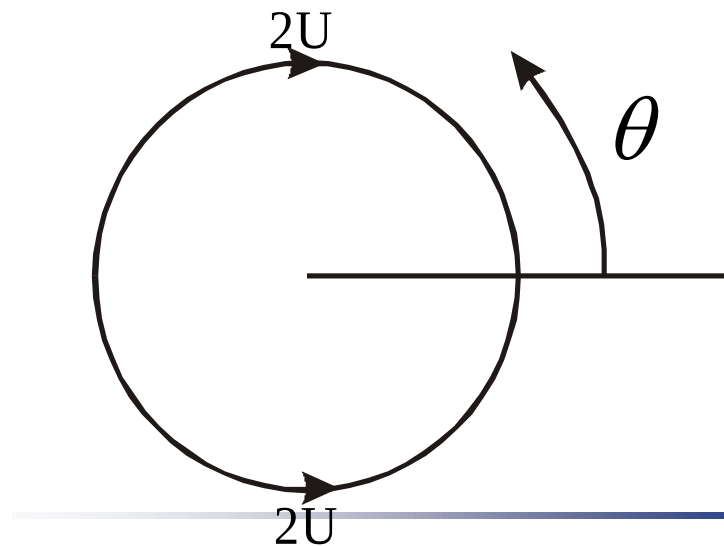
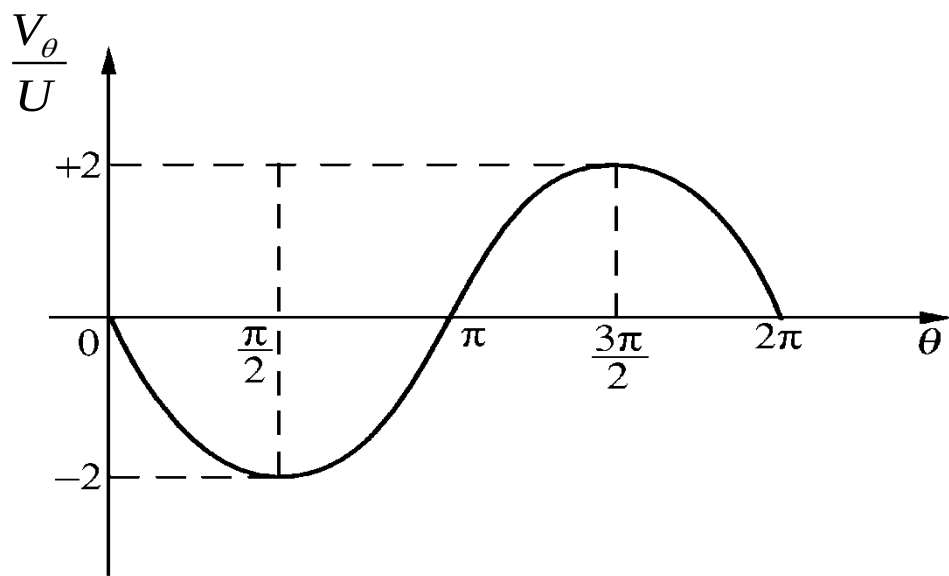
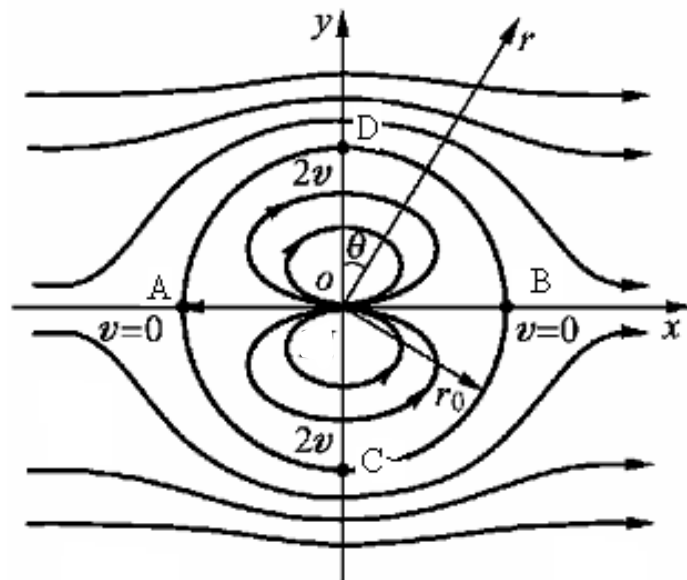
$$\phi = U \cos \theta \left(r + \frac{a^2}{r} \right)$$



物体绕流的势流流动

在圆柱表面的速度为：

$$V_{\theta} \Big|_{r=a} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -U \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \Big|_{r=a}$$
$$= -2U \sin \theta \begin{cases} = 0 & \text{当 } \theta = 0, \pi \\ = \mp 2U & \text{当 } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$





物体绕流的势流流动

圆柱表面上的压力分布可由Bernoulli方程求得。在无穷远处，速度为 U ，压强为 p_∞ ，则有：

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{V_\theta^2}{2g} = \frac{p_\infty}{\rho g} + \frac{U^2}{2g}$$

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho (U^2 - V_\theta^2) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

工程上为了处理问题方便起见，引入一个无量纲压力系数，

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

物体绕流的势流流动

圆柱表面上的压力分布由压力系数表示：

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2} C_p \rho U^2, \quad C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

讨论：

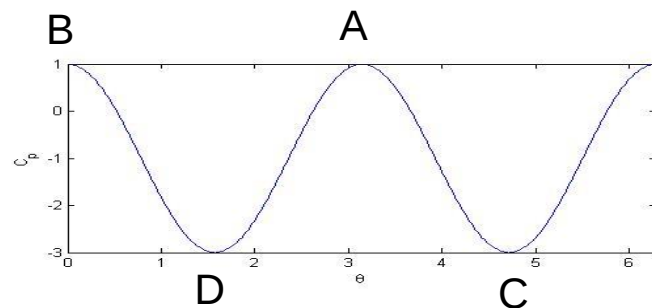
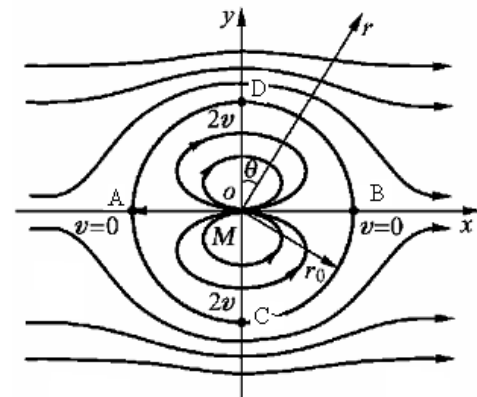
1、前、后驻点(A、B点)：

$$V_r = V_{\theta} = 0, \quad C_p = 1, \quad p_{\max} = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U^2$$

2、C、D点：

$$V_r = 0, \quad V_{\theta, \max} = 2U, \quad C_p = -3, \quad p_{\min} = p_{\infty} - \frac{3}{2} \rho U^2$$

3、在 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ 和 $180^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ 的范围内，圆柱面上的压力作用是对称的，即作用在其上的压力是平衡的。





物体绕流的势流流动

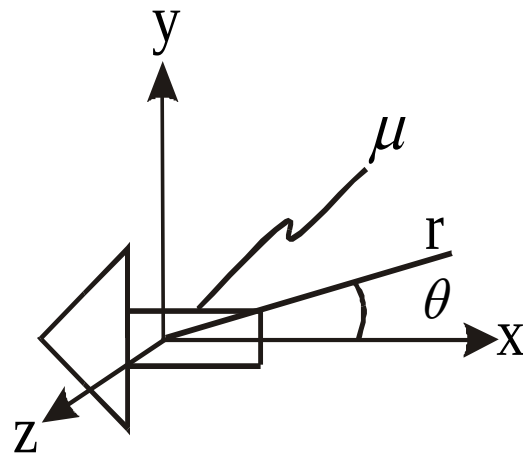
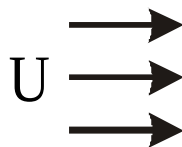
例子5：三维均匀流与三维偶极子流的叠加 ——绕三维球的势流流动(sphere)。

三维均匀流和偶极子流叠加后的速度势为：

$$\phi = Ux + \frac{\mu \cos \theta}{4\pi r^2}$$

速度场为：

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \cos \theta \left(U - \frac{\mu}{2\pi r^3} \right)$$





物体绕流的势流流动

同样，为了满足物面条件，需要在 $r = a$ (a 为球半径) 上， $V_r = 0$ ，即：

$$V_r \Big|_{r=a} = \cos \theta \left(U - \frac{\mu}{2\pi r^3} \right) \Big|_{r=a} = 0$$
$$\Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{\mu}{2\pi U}} \quad \text{or} \quad \mu = 2\pi U a^3$$

因此，绕三维球的势流流动的速度势为：

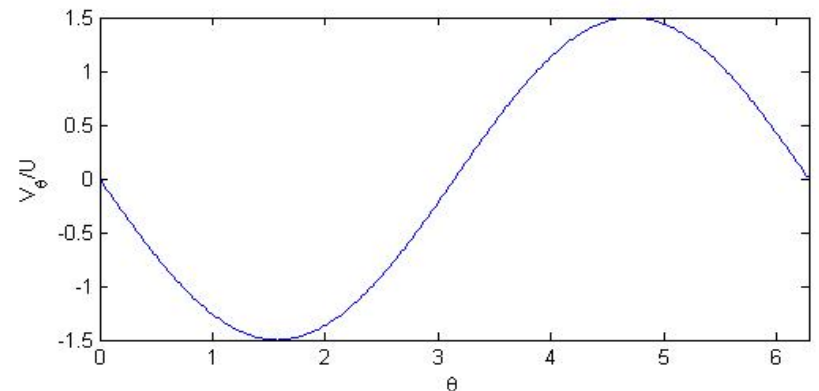
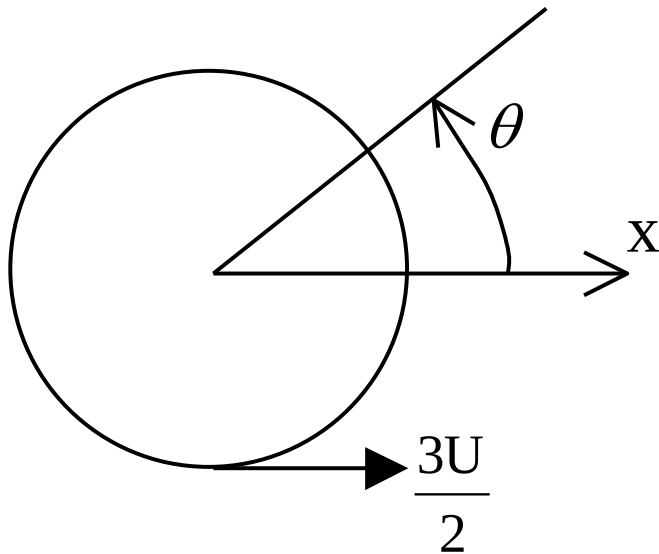
$$\phi = U \cos \theta \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right)$$



物体绕流的势流流动

在球表面的速度为：

$$V_{\theta} \Big|_{r=a} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -U \sin \theta \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \Big|_{r=a}$$
$$= -\frac{3U}{2} \sin \theta \begin{cases} = 0 & \text{当 } \theta = 0, \pi \\ = -\frac{3U}{2} & \text{当 } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$





物体绕流的势流流动

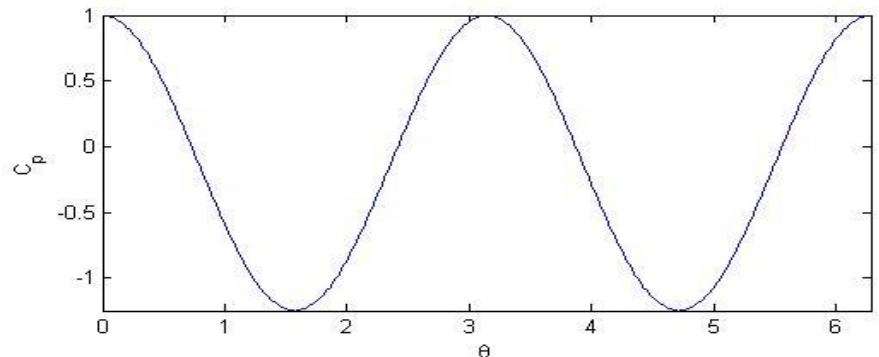
球表面上的压力分布同样可由Bernoulli方程求得。在无穷远处，速度为 U ，压强为 p_∞ ，则有：

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{V_\theta^2}{2g} = \frac{p_\infty}{\rho g} + \frac{U^2}{2g}$$

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho (U^2 - V_\theta^2) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right)$$

引入一个无量纲压力系数，

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta$$





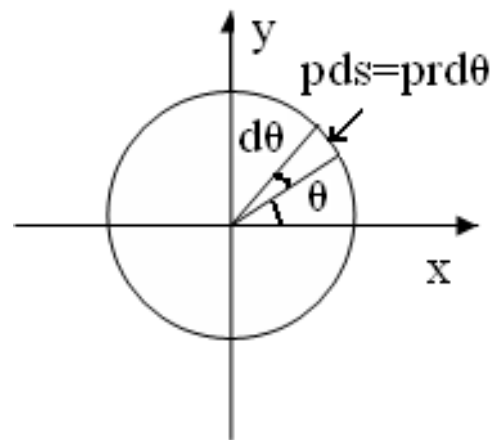
物体绕流的势流流动

绕二维圆柱和三维球的势流流动，**由于物体表面的压力分布是对称的，因此既不产生阻力也无升力。**

比如，在单位长度的圆柱上作用在微元弧段上的总**压力**和**阻力**分别为：

$$F_D = F_x = - \int_0^{2\pi} a \left[p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \right] \cos \theta d\theta = 0$$

$$F_L = F_y = - \int_0^{2\pi} a \left[p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \right] \sin \theta d\theta = 0$$

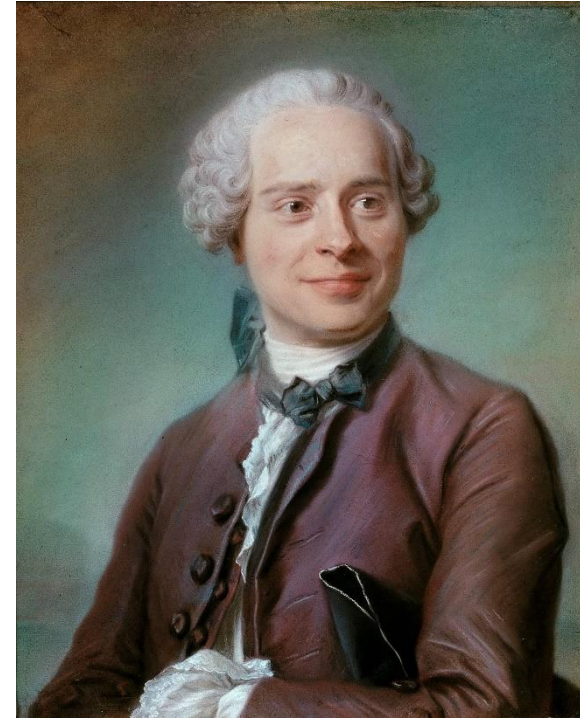




物体绕流的势流流动

对于均匀来流绕任何物体势流流动，只要流场是对称的和定常的，物体都不会受到流体任何作用力(阻力和升力)，这个现象称为**达朗伯佯谬**（**d'Alembert's paradox**）。

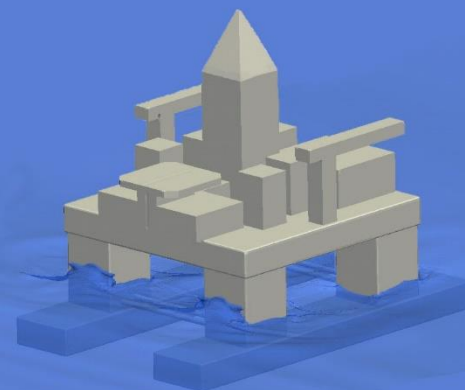
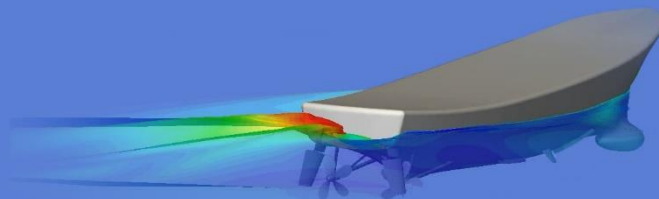
这与常识不符合，产生这一结果的原因是没有考虑流体的粘性。



Jean d'Alembert
(1717-1783)

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

<http://dcwan.sjtu.edu.cn>



*部分素材来源于网络