



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主讲人：万德成

章节：第6章 理想流体的势流理论

内容：6.4 匀速运动物体的势流流动



匀速运动物体的势流流动

前面的物体绕流问题，都是物体固定不动，而是有一个均匀来流对物体的绕流。而实际问题中，更多的是物体在静止的流体中运动。

- 1) 匀速运动物体的势流流动与静止物体的势流绕流流动是相同还是不同？也就是说，能不能用静止物体的势流绕流代替运动物体的势流流动？
- 2) 匀速运动物体的势流流动是定常流动还是非定常流动？
- 3) 在匀速运动物体的势流流动中，物体是否受流体作用力？即达朗伯佯谬是否成立？



匀速运动物体的势流流动

对第一个问题和第三个问题到后面来回答。先来看第二个问题：

匀速运动物体的势流流动是定常流动还是非定常流动？

这取决于坐标系的选取。

我们来考虑一个物体在静止流体中，在 x 方向以速度 U 作匀速运动。 S 为物体表面上的驻点。



匀速运动物体的势流流动

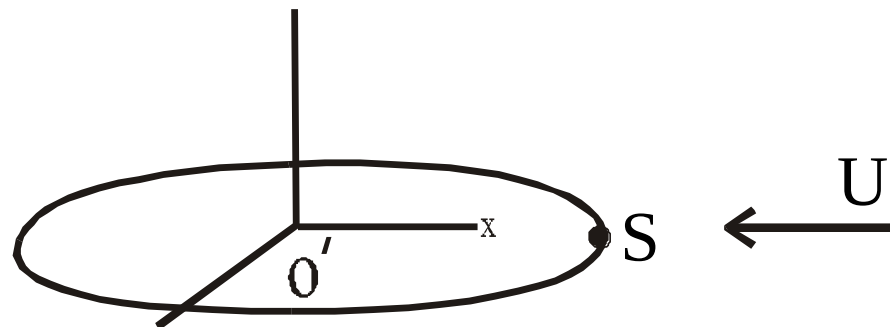
如果坐标系固定在流场中，记为 (O, x, y, z) 坐标系，则流动是**非定常的**，它满足下面的控制方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi = 0 \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = (U, 0, 0) \cdot (n_x, n_y, n_z) = Un_x, \quad \text{在物面上} \\ \mathbf{V} \rightarrow 0, \quad \phi \rightarrow 0, \quad \text{当 } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad \text{无穷远处条件} \\ \mathbf{V} = \nabla \phi = \mathbf{U}_0, \quad \text{当 } t = 0, \quad \text{初始条件} \end{array} \right.$$



匀速运动物体的势流流动

如果坐标系固定在物体上，记为 (O', x', y', z') 坐标系，则流动是**定常的**，它满足下面的控制方程：



$$\begin{cases} \nabla^2 \phi' = 0 \\ \mathbf{V}' \cdot \mathbf{n}' = \frac{\partial \phi'}{\partial n'} = 0, & \text{在物面上} \\ \mathbf{V}' \rightarrow (-U, 0, 0), \quad \phi' \rightarrow -Ux, \quad \text{当 } |\mathbf{x}'| \rightarrow \infty, \quad \text{无穷远处条件} \end{cases}$$

在 (O', x', y', z') 坐标系下，这个问题与均匀流中固定物体的势流绕流问题是一致的。



匀速运动物体的势流流动

两个坐标系之间可互相转换，有：

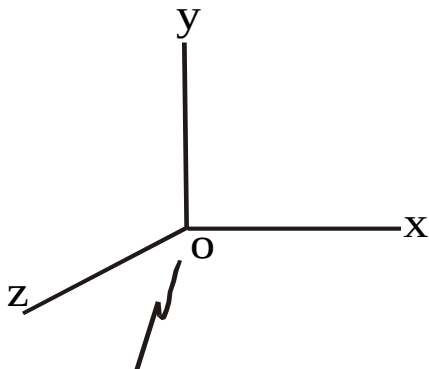
$$\mathbf{V}(x, y, z, t) = \mathbf{V}'(x', y', z') + \mathbf{U} = \mathbf{V}'(x - Ut, y, z) + \mathbf{U}$$

$$\phi(x, y, z, t) = \phi'(x', y', z') + Ux' = \phi'(x - Ut, y, z) + Ux'$$

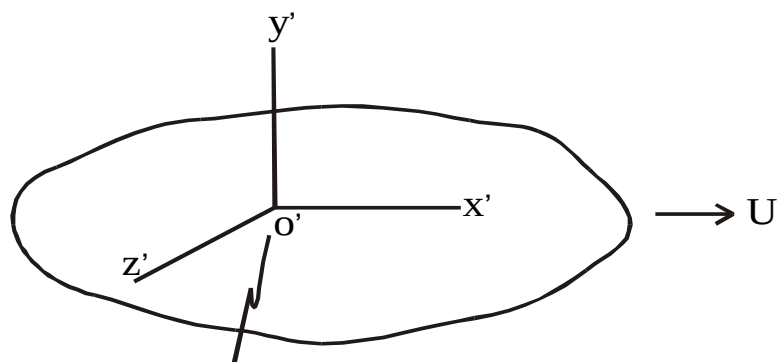
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{U} \cdot t \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{U} \cdot t$$

$$\mathbf{V}'(x', y', z') = \mathbf{V}(x, y, z, t) - \mathbf{U} = \mathbf{V}(x' + Ut, y', z', t) - \mathbf{U}$$

$$\phi'(x', y', z') = \phi(x' + Ut, y', z', t) - Ux'$$



固定在流场中



固定在运动的物体上



匀速运动物体的势流流动

根据动力学条件(不考虑质量力), 在无穷远处, 对两个坐标系分别有:

$$p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 = C_o(t)$$

$$p_{\infty} = C_o(t)$$

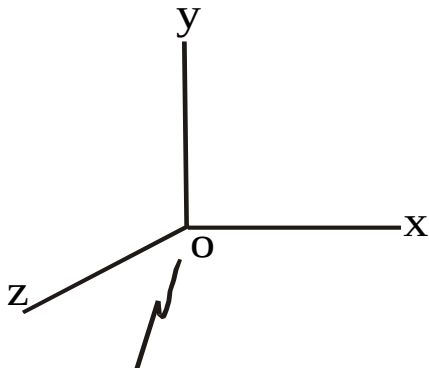
$$p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V'_{\infty}^2 = C'_o$$

$$p_{\infty} = C'_o - \frac{1}{2} \rho U^2$$

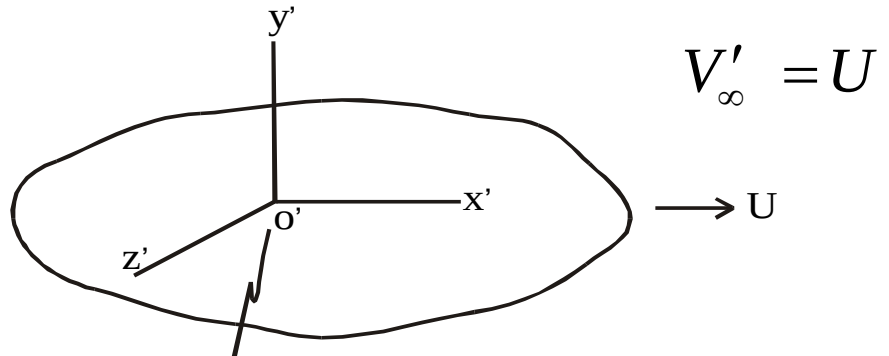


$$C_o(t) = C'_o - \frac{1}{2} \rho U^2$$

$$V_{\infty} = 0$$



固定在流场中



固定在运动的物体上



匀速运动物体的势流流动

根据动力学条件(不考虑质量力), 在(驻)点S处, 对(O, x, y, z) 坐标系有:

$$p_s = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho V^2 + C_o(t) = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho U^2 + C_o(t)$$

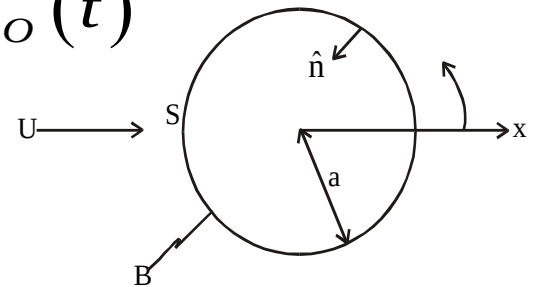
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\phi' + Ux') = \cancel{\frac{\partial \phi'}{\partial t}} + U \cancel{\frac{\partial x'}{\partial t}} = -U^2$$

因此有:

$$p_s = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho U^2 + C_o(t) = \frac{1}{2} \rho U^2 + C_o(t)$$

$$C_o(t) = C'_o - \frac{1}{2} \rho U^2$$

$$\Rightarrow p_s - p_\infty = \frac{1}{2} \rho U^2$$





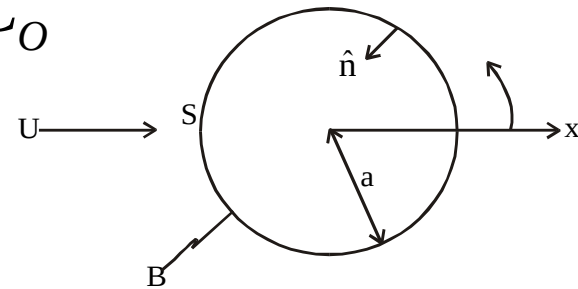
匀速运动物体的势流流动

如果采用 (O', x', y', z') 坐标系，则非常容易得到驻点S处的压力：

$$p_s = -\rho \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho V'^2 + C'_0 = C'_0$$

即：

$$p_s - p_\infty = \frac{1}{2} \rho U^2$$



采用 (O', x', y', z') 坐标系，可以非常容易得到物体表面的压力分布：

$$p = -\rho \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho V'^2 + C'_0 = -\frac{1}{2} \rho V'^2 + C'_0$$

$$p - p_\infty = \frac{1}{2} \rho (U^2 - V'^2) = \frac{1}{2} \rho (U^2 - |\nabla \phi'|^2)$$

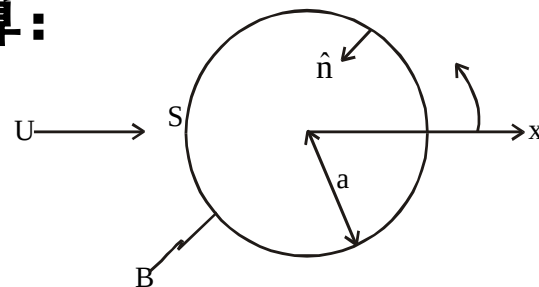
匀速运动物体的势流流动

例子： 求一圆柱以速度 U 匀速运动时受到的流体作用力。

解： 匀速运动物体受流体作用力由下式计算：

$$\mathbf{F}_S = \iint_B p \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} \rho \iint_B \left(\frac{p_\infty}{\rho} + U^2 - |\nabla \phi'|^2 \right) \mathbf{n} dS$$

$$= -\frac{1}{2} \rho \iint_B |\nabla \phi'|^2 \mathbf{n} dS = -\frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} |\nabla \phi'|_{r=a}^2 \mathbf{n} a d\theta$$



$$F_x = \mathbf{F}_S \cdot \mathbf{i} = -\frac{\rho a}{2} \int_0^{2\pi} |\nabla \phi'|_{r=a}^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} d\theta = \frac{\rho a}{2} \int_0^{2\pi} |\nabla \phi'|_{r=a}^2 \cos \theta d\theta$$

$$F_y = \mathbf{F}_S \cdot \mathbf{j} = -\frac{\rho a}{2} \int_0^{2\pi} |\nabla \phi'|_{r=a}^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} d\theta = \frac{\rho a}{2} \int_0^{2\pi} |\nabla \phi'|_{r=a}^2 \sin \theta d\theta$$



匀速运动物体的势流流动

ϕ' 就是均匀流场中固定物体的绕流速度势，即：

$$\phi' = U \cos \theta \left(r + \frac{a^2}{r} \right)$$

$$\nabla \phi' = \left(\frac{\partial \phi'}{\partial r}, \frac{\partial \phi'}{r \partial \theta} \right)_{r=a} = (0, -2U \sin \theta)$$

所以有：

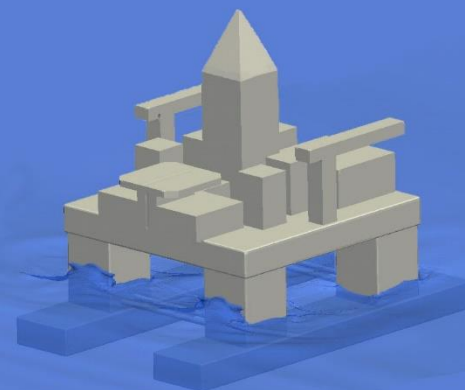
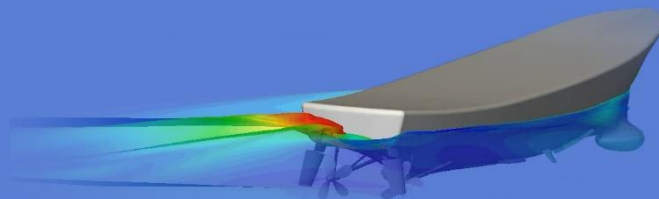
$$F_x = \frac{\rho a}{2} \int_0^{2\pi} |\nabla \phi'|_{r=a}^2 \cos \theta d\theta = \frac{\rho a}{2} \int_0^{2\pi} (4U^2 \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta = 0$$

$$F_y = \frac{\rho a}{2} \int_0^{2\pi} |\nabla \phi'|_{r=a}^2 \sin \theta d\theta = \frac{\rho a}{2} \int_0^{2\pi} (4U^2 \sin^2 \theta \sin \theta) d\theta = 0$$

如果物体在静止流体中作匀速运动，与均匀流场中固定物体的势流绕流一样，物体也不受流体作用力(达朗伯佯谬)。

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

<http://dcwan.sjtu.edu.cn>



*部分素材来源于网络