上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主 讲 人：万德成

章节：第6章 理想流体的势流理论

内容：6.5 有环流动

物体势流绕流的有环流流动

从上面两节，可以知道，无论是在均匀来流中，固定物体的势流绕流，还是在静止流体中，物体作匀速运动的情况，物体都不受流体作用力，即达朗伯佯谬。

在什么情况，势流流场中，物体将受到流体的作用力？

达朗伯佯谬的前提：

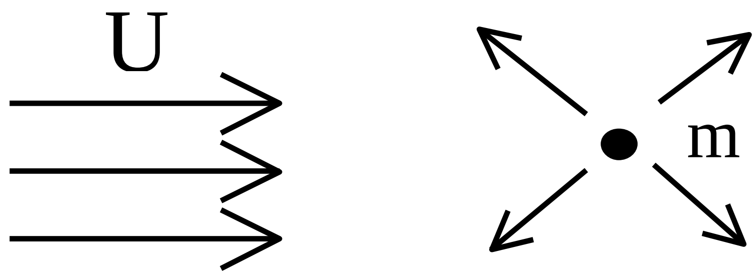
- 物体（流场）对称
- 流场非定常

物体势流绕流的有环流流动

首先考虑有环流流动，产生不对称的流场。

无环流流动：

均匀流+点源



对称流动

有环流流动：

均匀流+点涡

不对称流动

物体势流绕流的有环流流动

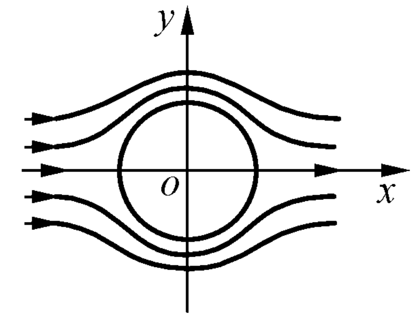
考虑一个简单的二维圆柱有环流流动，即：

均匀流 + 偶极子 + 点涡 → **无环流圆柱流动 + 点涡**

(a) 无环流圆柱流动：

$$\phi_1 = U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) r\cos\theta, \quad \psi_1 = U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) r\sin\theta$$

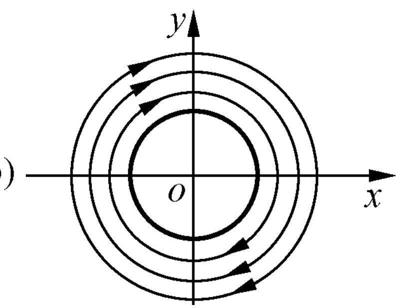
(a)



(b) 点涡：

$$\phi_2 = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta, \qquad \psi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

(b)

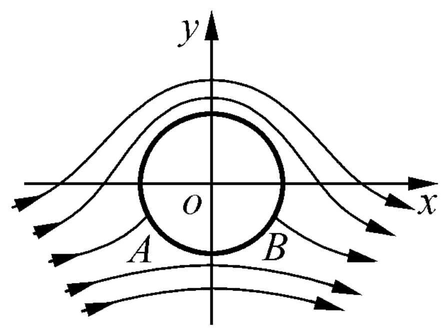


(c) 有环流圆柱流动：

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) r\cos\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

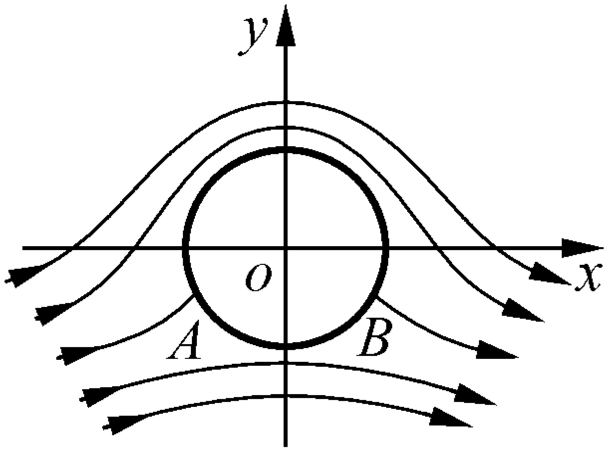
$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) r\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

(c)



物体势流绕流的有环流流动

叠加后的流动是不对称的流动：上部和环流方向一致，速度加快；下部方向相反，速度减慢；上部压强降低，下部升高，这将产生升力(lift force)。



可以得到势流叠加后的速度分布：

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

物体势流绕流的有环流流动

现在可以验证上述流动是否是圆柱绕流的流动。即：是否满足圆柱表面流动条件和无穷远处条件。

当 $r = a$ 时，令 $\psi = C$，有： $a = e^{C\frac{2\pi}{\Gamma}}$

这是圆柱表面形状。

当 $r = a$ 时，有： $V_r = 0$。 满足物面条件。

当 $r = \infty$ 时，有： $V = U$。 满足无穷远处不受扰动的条件。

因此，这样叠加后的流动是圆柱绕流流动。

物体势流绕流的有环流流动

圆柱表面上的速度分布($r = a$)：

$$\begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta = -2U\sin\theta - \dfrac{\Gamma}{2\pi a} \end{cases}$$

在圆柱表面上，径向速度为零，即无分离，切向速度为θ的正弦函数。

驻点位置： $V_\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = -\dfrac{\Gamma}{4\pi a U}$

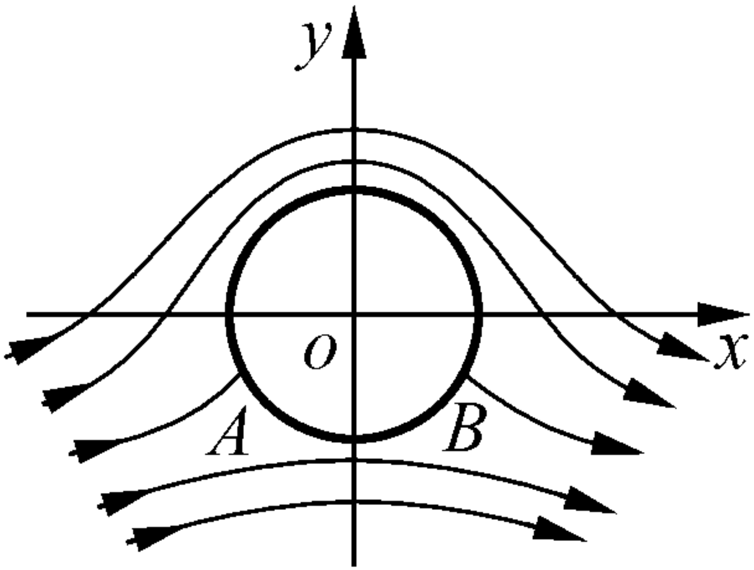
物体势流绕流的有环流流动

有几个驻点？ $V_\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = -\dfrac{\Gamma}{4\pi a U}$

(a)： 当 $\Gamma < 4\pi a U$ 时，也就是 $|\sin\theta| < 1$，有两个驻点。

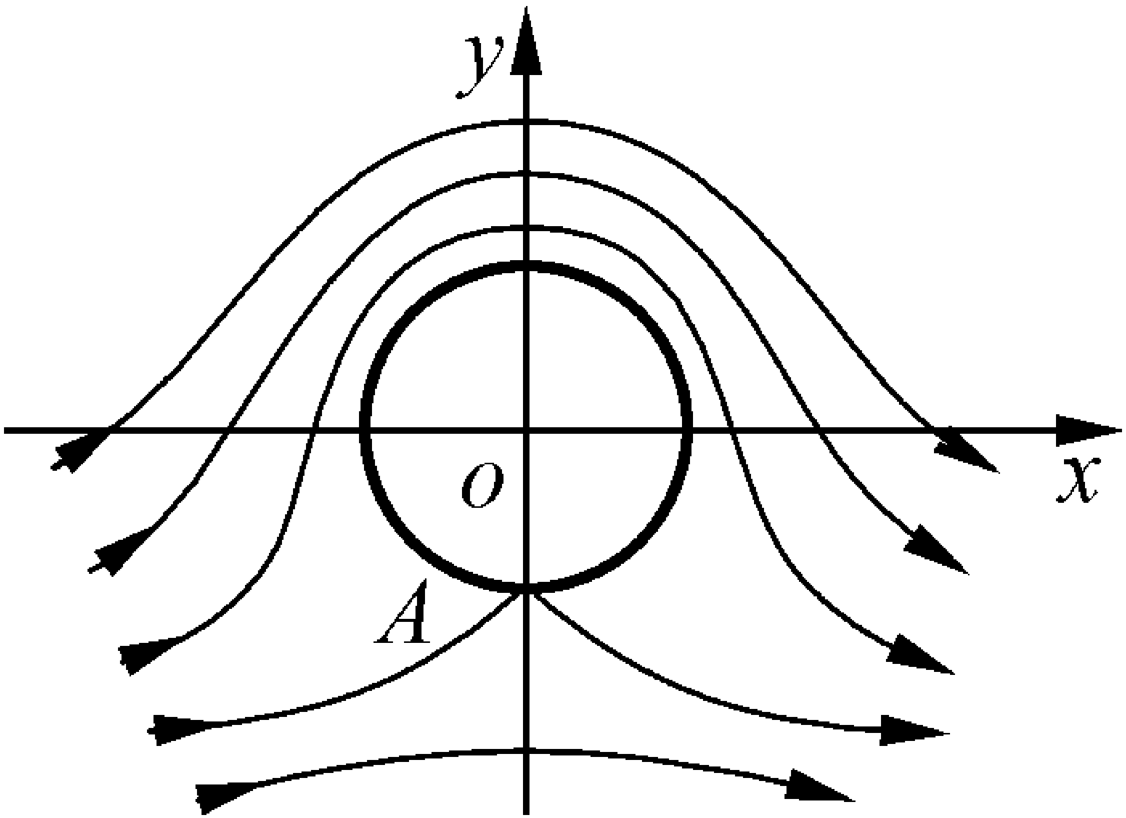
因 $\sin(\theta) = \sin[\pi - \theta]$，即 θ 和 $(\pi - \theta)$ 就对应两个驻点。

随着Γ增大，θ也增大，驻点向中间移动。



物体势流绕流的有环流流动

(b)： 当 $\Gamma = 4\pi a U$ 时，$\sin\theta = -1 \Rightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{2}$，有一个驻点。

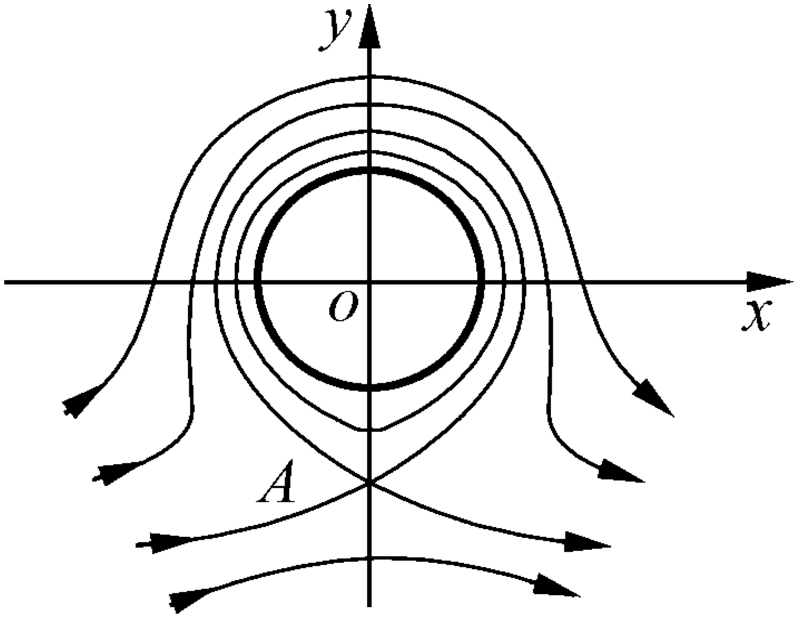


物体势流绕流的有环流流动

(c)：当 $\Gamma > 4\pi aU$ 时，$|\sin\theta| > 1$ 此时驻点不在圆柱面上。需求解下面驻点方程，可得两个驻点，一个在圆柱内部，一个在外部。

$$V_r = U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta = 0$$

$$V_\theta = -U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0$$



物体势流绕流的有环流流动

圆柱面上的压力分布($r = a$)：

列出无穷远处和圆柱表面上的Bernoulli方程：

$$p + \frac{1}{2}\rho V_\theta{}^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2$$

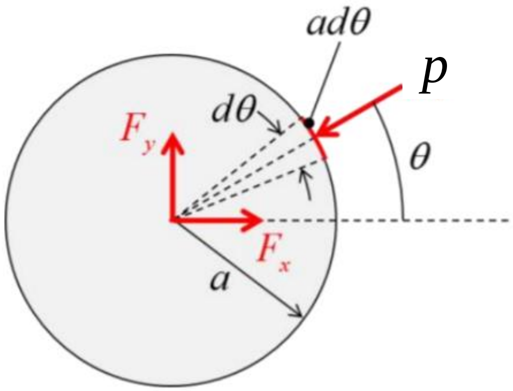
可以得到：

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left(U^2 - \left(-2U\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2\right)$$

物体势流绕流的有环流流动

圆柱受到的阻力和升力：

作用在单位长度圆柱体上的阻力和升力为：



阻力：与来流方向相反

$$F_x = F_D = -\int_0^{2\pi} pad\theta\cos\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left\{p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left[U^2 - (-2U\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi a})^2\right]\right\}a\cos\theta d\theta$$

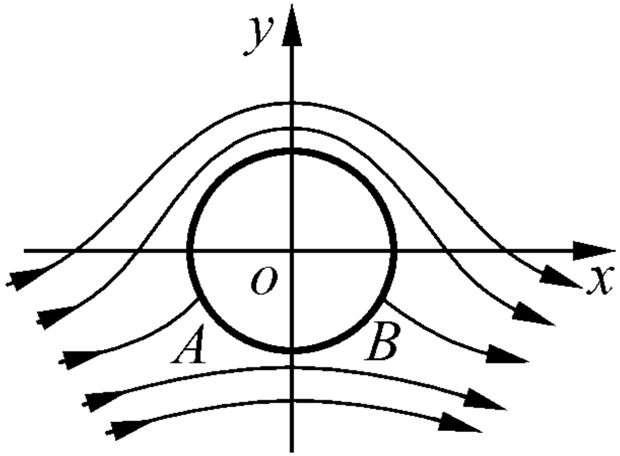
物体势流绕流的有环流流动

$$F_D = -\int_0^{2\pi}\left\{p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left[U^2 - (-2U\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi a})^2\right]\right\}a\cos\theta d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left\{\cancel{\left(p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2\left(1 - 4\sin^2\theta\right)\right)} + \frac{1}{2}\rho\left[-\frac{2\Gamma U}{\pi a}\sin\theta - \cancel{\left(\frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2}\right]\right\}a\cos\theta d\theta$$

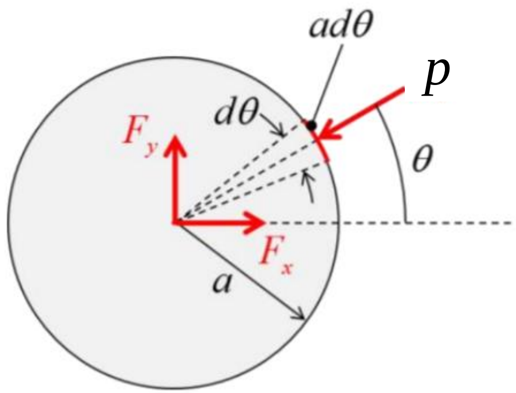
$$= \frac{\rho\Gamma U}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\, d\theta = 0$$

圆柱体受的阻力为零!



物体势流绕流的有环流流动

升力：垂直于流方向



$$F_L = F_y = -\int_0^{2\pi} pad\theta \sin\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left\{ p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left[U^2 - (-2U\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi a})^2 \right] \right\} a\sin\theta d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left\{ \cancel{\left(p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 \left(1 - 4\sin^2\theta\right) \right)} + \frac{1}{2}\rho\left[-\frac{2\Gamma U}{\pi a}\sin\theta - \cancel{\left(\frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2} \right] \right\} a\sin\theta d\theta$$

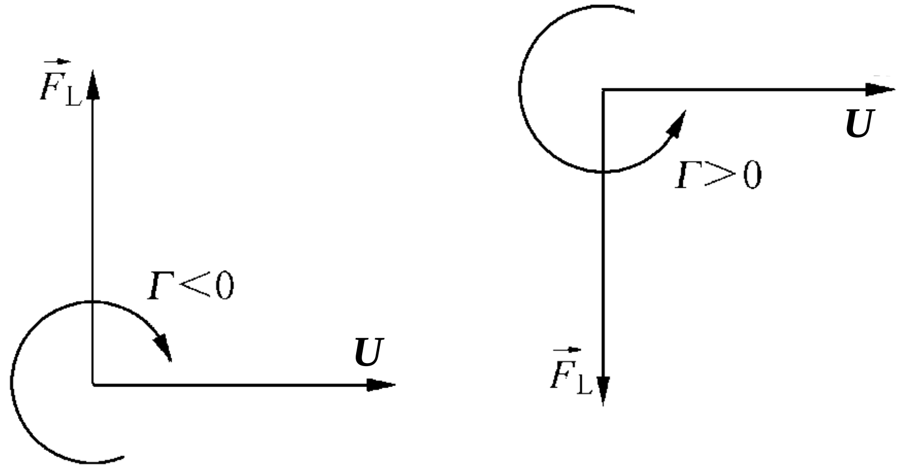
$$= \frac{\rho\Gamma U}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \rho\Gamma U$$

圆柱体上的升力不为零!!!

物体势流绕流的有环流流动

理想流体绕圆柱体有环流的流动中，在垂直于来流方向上，流体作用在单位长度的圆柱体上的升力等于流体的密度、来流速度和环量的乘积。

升力的方向为 U 的方向反环流转 90°角。



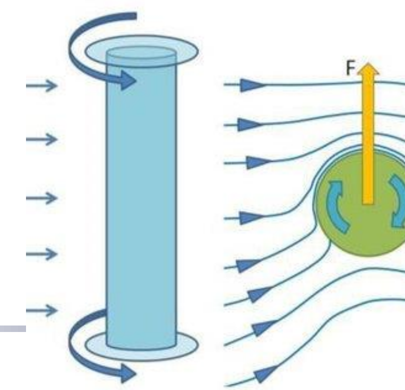
物体势流绕流的有环流流动

麦格努斯（Magnus）效应：旋转圆柱会产生升力的现象。

利用这个原理设计旋筒风帆装置（Flettner rotor），用风力驱动船舶。

E-Ship号

E-Ship号



物体势流绕流的有环流流动

在高速球类运动方面：

兵乒球、网球的削球或弧线球，足球的香蕉球等球技，都和麦格努斯效应有关。

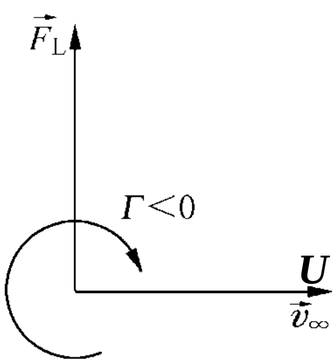
兵乒球：削球

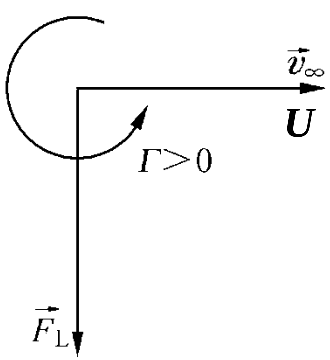
足球：香蕉球

物体势流绕流的有环流流动

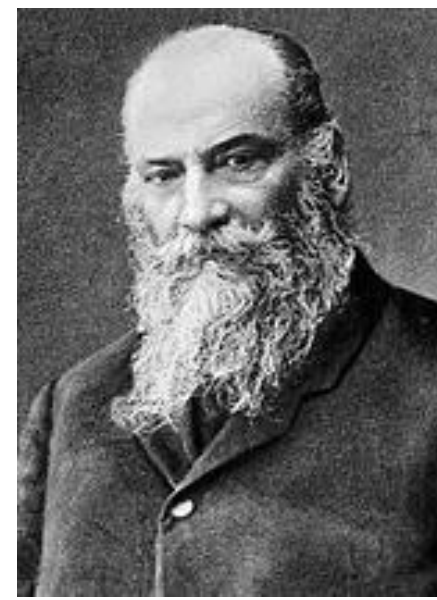
对二维和三维均匀流 U 和环量为 Γ 的有环流流动中的物体受到的升力，上式都成立，即：有环流的流动中，在垂直于来流方向上，流体作用在单位长度的物体上的升力等于流体的密度、来流速度和环量的乘积，称为**Kutta-Joukowski公式**：

$$\boxed{\mathbf{F}_L = \rho \mathbf{U} \times \mathbf{\Gamma}}$$





Martin Wilhelm Kutta
(1867-1944)

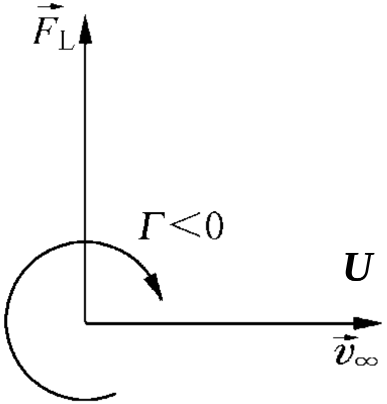


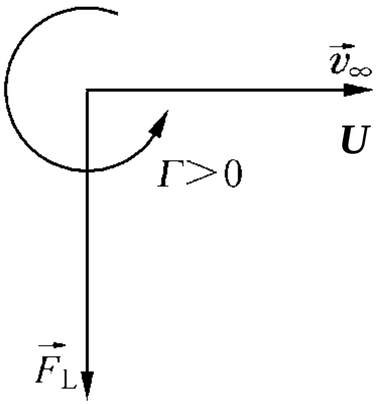
Nikolai Joukowski
(1847-1921)

物体势流绕流的有环流流动

如果流场中有 n 个点涡的有环流流动，可以得到更一般性的计算物体升力的**Kutta-Joukowski公式**：

$$\boxed{\mathbf{F}_L = \rho \mathbf{U} \times \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Gamma}_i \right)}$$





物体势流绕流的有环流流动

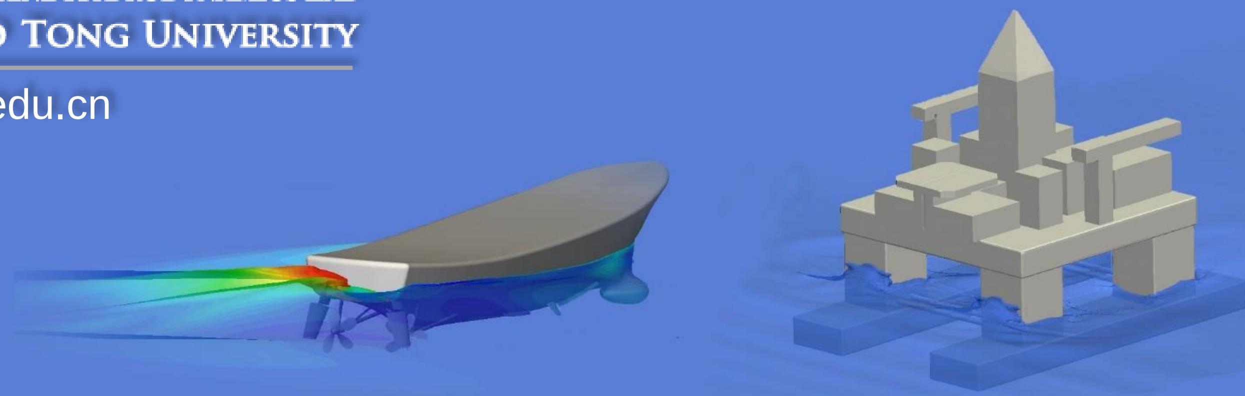
在什么情况下，势流流场中，物体将受到流体的作用力？

流场(或物体)不对称 → 有环流流动 → 升力

流场非定常 → ？

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

http://dcwan.sjtu.edu.cn



*部分素材来源于网络