



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主讲人：万德成

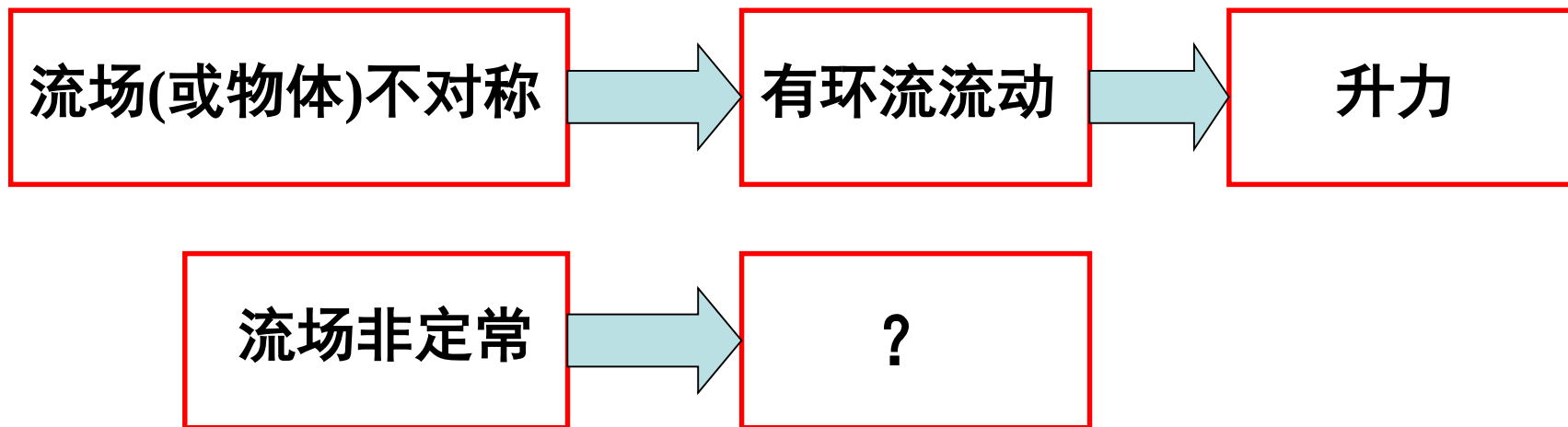
章节：第6章 理想流体的势流理论

内容：6.6 非匀速运动物体的势流流动与
附加质量



物体势流绕流的有环流流动

在什么情况下，势流流场中，物体将受到流体的作用力？



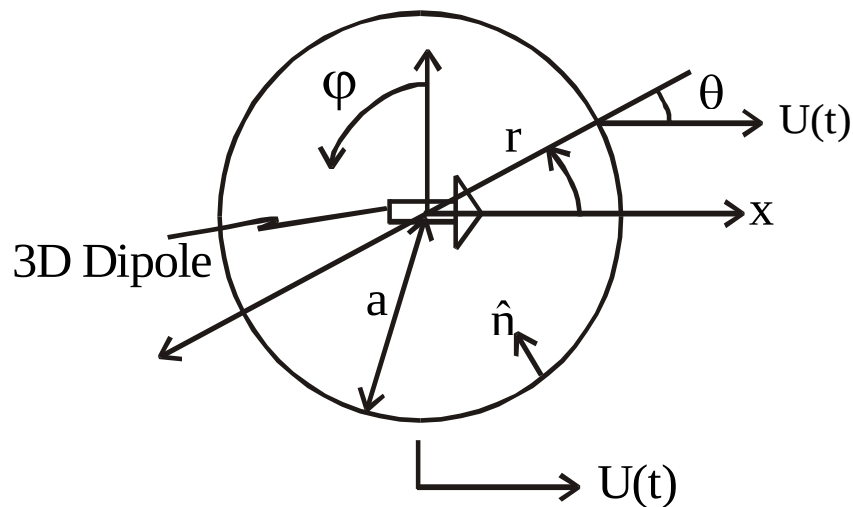
非匀速运动物体的势流流动

现在来考虑，一个圆球在静止流体中，以 $U(t)$ 在 x 方向作加速运动，求作用在运动物体上的流体作用力。

球坐标 (r, θ, φ)

如果把坐标系固定在空间上，即 (O, x, y, z) ，那么问题的控制方程为：

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = U(t) \cos \theta, \quad \text{在球面上} \\ \nabla \phi \rightarrow 0, \quad \text{当 } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad \text{无穷远处条件} \\ \nabla \phi = \mathbf{U}_0, \quad \text{当 } t = 0, \quad \text{初始条件} \end{cases}$$





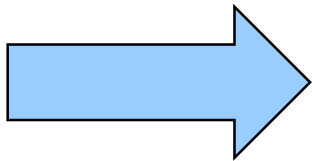
非匀速运动物体的势流流动

上面问题实际上就是一个运动三维偶极子流，因此
速度势为：

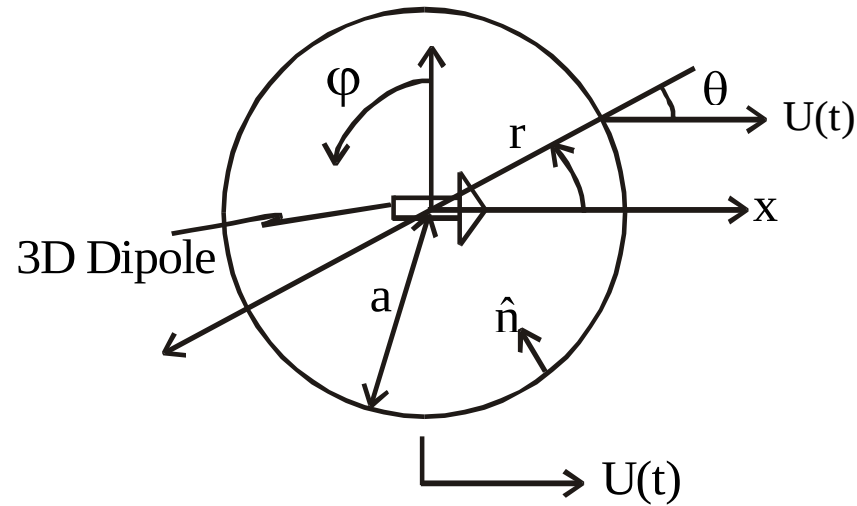
$$\phi = -\frac{M}{4\pi} \frac{x}{r^3} = -\frac{M}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

用物面条件，可以确定偶极子矩 M ：

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{M}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} \right) \bigg|_{r=a} = \frac{M}{2\pi} \frac{\cos \theta}{a^3} = U(t) \cos \theta$$



$$M = 2\pi a^3 U(t)$$





非匀速运动物体的势流流动

整理得到问题的速度势：

$$\phi = -\frac{M}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} = -\frac{U(t)a^3}{2} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

代入动力学方程 (如果不考虑重力)，可求得压力分布：

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} \right) + C(t)$$

在x方向，圆球受到的流体作用力为：

$$F_x = \iint_B p|_{r=a} n_x dS = -\rho \iint_B \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} \right)_{r=a} n_x dS$$



非匀速运动物体的势流流动

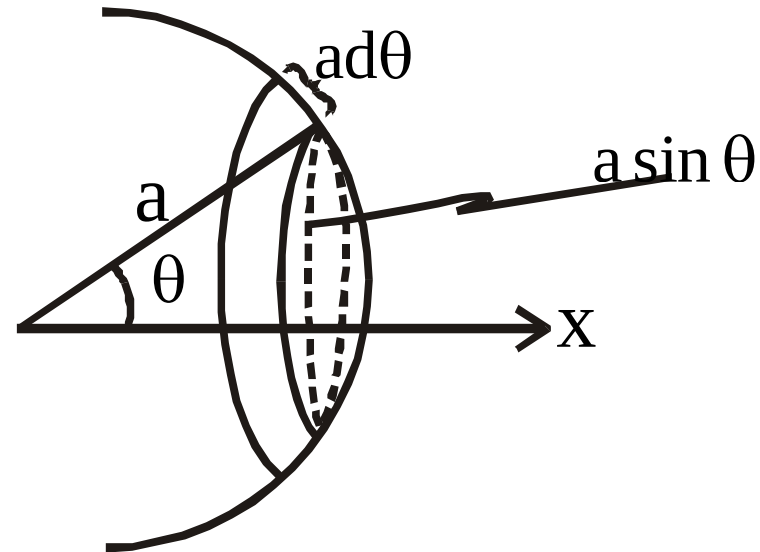
在圆球表面有：

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{r=a} = -\dot{U}(t) \frac{a^3 \cos \theta}{2r^2} \bigg|_{r=a} = -\frac{1}{2} \dot{U}(t) a \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \nabla \phi|_{r=a} &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \\ &= \left(U \cos \theta, \frac{1}{2} U \sin \theta, 0 \right) \end{aligned}$$

$$\left| \nabla \phi \right|^2 \bigg|_{r=a} = U^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{4} U^2 \sin^2 \theta$$

$$\iint_B dS = \int_0^\pi (a d\theta) (2\pi a \sin \theta)$$





非匀速运动物体的势流流动

因此圆球受的水平方向上的流体作用力为：

$$\begin{aligned} F_x &= -\rho \iint_B \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} \right)_{r=a} n_x dS \\ &= -\rho \int_0^\pi \left[\underbrace{-\frac{1}{2} \dot{U}(t) a \cos \theta}_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(U^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{4} U^2 \sin^2 \theta \right)}_{|\nabla \phi|^2} \right] \left(\underbrace{-\cos \theta}_{n_x} \right) \underbrace{(2\pi a^2 \sin \theta) d\theta}_{dS} \\ &= -\pi \rho \dot{U}(t) a^3 \underbrace{\int_0^\pi (\sin \theta \cos^2 \theta) d\theta}_{2/3} + \rho U^2 \pi a^2 \underbrace{\int_0^\pi (\sin \theta \cos \theta) \left(\cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right) d\theta}_0 \\ &= -\dot{U}(t) \left[\rho \frac{2}{3} \pi a^3 \right] \end{aligned}$$



非匀速运动物体的势流流动

圆球在x方向上受到的流体作用力为：

$$F_x = -\dot{U}(t) \left[\rho \frac{2}{3} \pi a^3 \right]$$

具有质量单位

如果圆球在x方向作**匀速运动**，即： $\dot{U}(t) = 0$ ，因而 $F_x = 0$ ，即物体不受流体作用力，这与前面得到的结论是一致的。



非匀速运动物体的势流流动

如果圆球在x方向作**加速运动**，物体要受流体作用力：

$$F_x = -\dot{U}(t) \left[\rho \frac{2}{3} \pi a^3 \right] = -\dot{U}(t) \cdot m_A$$

把 $m_A = \rho \frac{2}{3} \pi a^3 = \frac{1}{2} (\rho \overset{\circ}{V})$ ，称为圆球的**附加质量(added mass, 或虚拟质量)**。
球体的体积

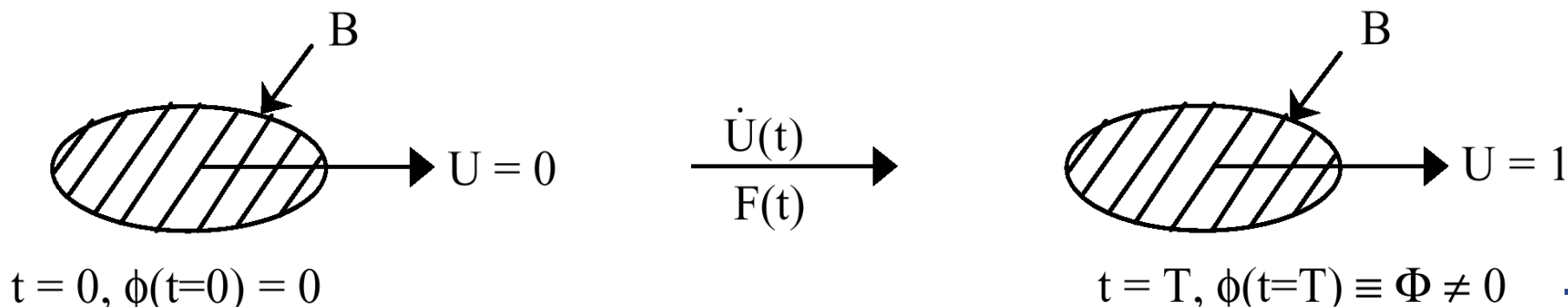
F_x 称为：**附加惯性力**。



附加质量的一般性表达形式

考虑在静止流体中，一个物体在 $t = 0$ 时刻，从静止状态开始沿 x 方向作加速运动，到时刻 $t = T$ 时，速度加速到 $U = 1$ 。根据动量定理有：物体从时刻 $t = 0$ 到 $t = T$ 对流体的作用力，等于流体在这个时间内的动量变化，即：

$$\int_0^T [-\mathbf{F}(t)] dt = \mathbf{M}(t = T) - \mathbf{M}(t = 0)$$





先计算流体的动量：

$$\mathbf{M}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \nabla \phi d\mathcal{V} = \iint_B \rho \phi \mathbf{n} dS$$

则x方向上流体的动量：

$$\mathbf{M}_x(t) = \iint_B \rho \phi(t) n_x dS$$

由于：

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } t = 0 \text{ 时} \\ \Phi & \text{当 } t = T \text{ 时} \end{cases}$$

所以：

$$\mathbf{M}_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } t = 0 \text{ 时} \\ \iint_B \rho \Phi n_x dS & \text{当 } t = T \text{ 时} \end{cases}$$



附加质量

在静止流体中，当物体以加速度 $\dot{\mathbf{U}}$ 作加速运动时，物体会受到流体作用力 $\mathbf{F}$ ，或者说，物体会对流体施加作用力 $-\mathbf{F}$ 。假设一个附加质量 (虚拟质量) 为 m_A ，物体对流体的作用力可表示为：

$$-\mathbf{F}(t) = -(-m_A \dot{\mathbf{U}}) = m_A \dot{\mathbf{U}}$$

则 x 方向上的力：

$$-F_x(t) = m_A \dot{U}$$

$$\int_0^T [-F_x(t)] dt = \int_0^T m_A \dot{U} dt = m_A U \Big|_{t=0}^{t=T} = m_A$$



由动量定理：

$$\int_0^T [-F_x(t)] dt = \mathbf{M}_x(t=T) - \mathbf{M}_x(t=0)$$

得： $m_A = \iint_B \rho \Phi n_x dS$

由时刻 $t = T$ 时的物面条件（在 $t = T$ 时刻， $\phi = \Phi$ ），有：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = U n_x = n_x$$

1

因此，得到附加质量的表达式：

$$m_A = \rho \iint_B \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS$$

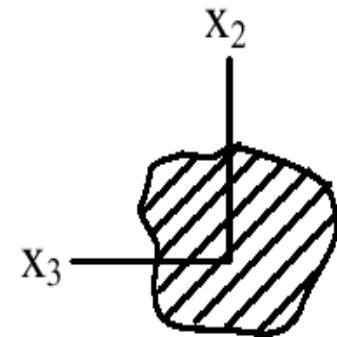
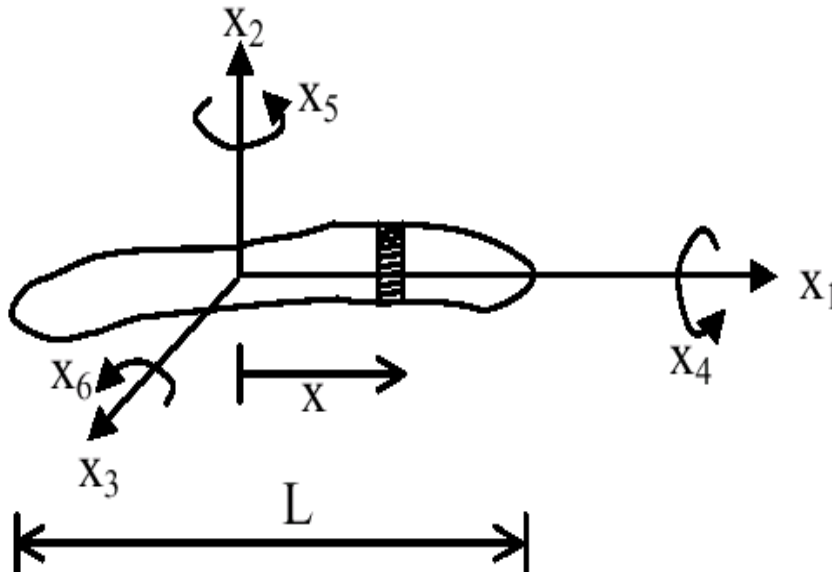


附加质量

上面的附加质量表达式，是考虑物体沿 x 一个方向作加速运动得到的。如果物体作六个自由度的运动 (6 Degree of Freedom, 6 DOF)，则可以得到一般性的附加质量表达式：

$$m_{ji} = \rho \iint_B \Phi_i n_j dS = \rho \iint_B \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS$$

($i, j=1, 2, 3, 4, 5, 6$)





附加质量的性质：

1) 附加质量与物体的形状、物体的运动方向，以及流体的密度有关

这里： Φ_i 是指物体以速度 $U_i = 1$ 运动时的速度势。下标 i 和 j 的含义：物体在 i 方向加速运动时，在 j 方向上产生附加惯性力的虚拟质量或附加质量。

$$m_{ji} = \rho \iint_B \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS$$

$(i, j=1, 2, 3, 4, 5, 6)$



附加质量的性质：

1) 附加质量与物体的形状、物体的运动方向，以及流体的密度有关

共有 $6 \times 6 = 36$ 个附加质量。显然可以看到，附加质量与物体形状(n_j)、物体运动方向(Φ_i)、流体密度(ρ)有关。

$$m_{ji} = \rho \iiint_B \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS$$

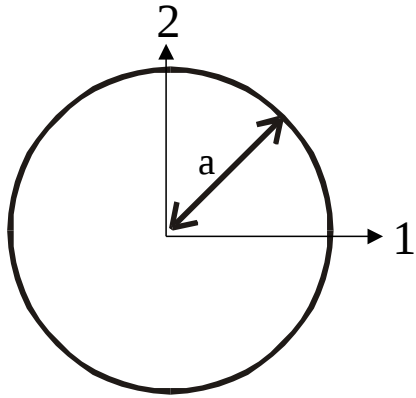
流体的密度

物体运动方向

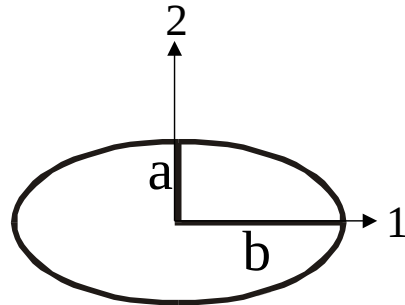
物体形状



物体形状、物体运动方向的影响：

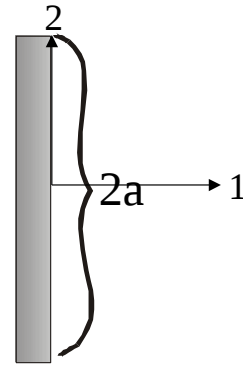


$$m_{11} = m_{22} = \rho\pi a^2$$



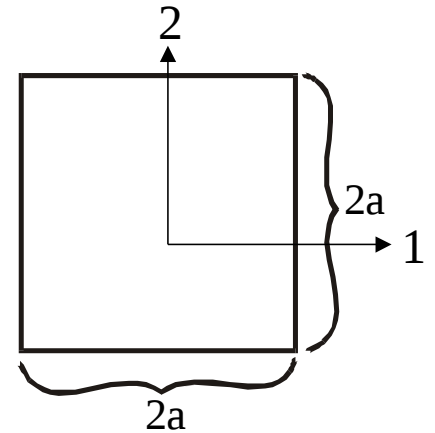
$$m_{11} = \rho\pi a^2$$

$$m_{22} = \rho\pi b^2$$



$$m_{11} = \rho\pi a^2$$

$$m_{22} = 0$$



$$m_{11} = m_{22} = \frac{3}{2} \rho\pi a^2$$



流体密度的影响：

由于附加质量与流体的密度成正比，密度越大，附加质量就越大，反之，附加质量就越小。比如：物体在空气中的非定常运动的附加质量，比在液体中的附加质量要小得多，与物体自身的质量相比，也是一个很小的量，因此一般情况下，**在空气中不考虑附加质量的影响。**

但对船舶海洋工程流体力学来说，附加质量与物体自身质量的数量级相同，是非常重要的量。比如，船舶摇摆和回转都是非定常的运动，在建立它们的运动方程时，必须计及附加质量的影响。



船舶的附加质量

纵荡: $m_{11} \approx (0.05 \sim 0.15)m$

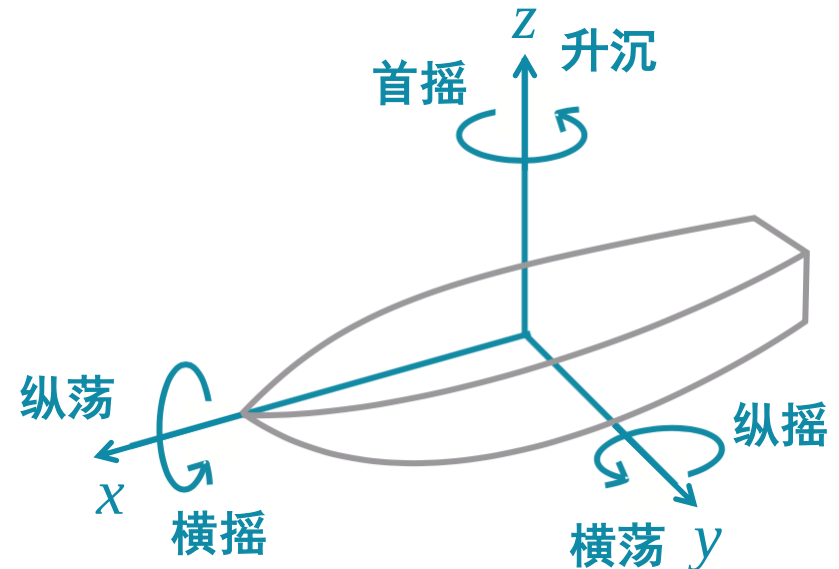
横荡: $m_{22} \approx (0.90 \sim 1.20)m$

升沉: $m_{33} \approx (0.90 \sim 1.20)m$

横摇: $m_{44} \approx (0.05 \sim 0.15)I_{xx}$

纵摇: $m_{55} \approx (1 \sim 2)I_{yy}$

首摇: $m_{66} \approx I_{yy}$





2)附加质量是一个6阶对称矩阵

$$\begin{aligned} m_{ji} &= \rho \iint_B \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = \rho \iint_B \Phi_i (\nabla \Phi_j \cdot \mathbf{n}) dS = \rho \oiint_{B+\infty} \Phi_i (\nabla \Phi_j \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= \rho \iiint_V \nabla \cdot (\Phi_i \cdot \nabla \Phi_j) dV = \rho \iiint_V (\nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j + \cancel{\Phi_i \nabla^2 \Phi_j}) dV \\ &= \rho \iiint_V (\nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j) dV = m_{ij} \end{aligned}$$

所以有：

$$m_{ji} = \rho \iiint_V (\nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j) dV = m_{ij}$$

由对称性(symmetry), 附加质量个数由 36 个减为 21 个。



可以证明（证明略）：

(a) 如果物体本身有一个对称面，且这一对称面又是坐标平面的话，则 21 个附加质量中有 9 个元素为零，剩下非零元素只有 $21 - 9 = 12$ 个。

(b) 如果物体本身有两个对称面，且这两个对称面都是坐标平面的话，则 21 个附加质量中有 13 个元素为零，剩下非零元素只有 $21 - 13 = 8$ 个。

(c) 如果物体本身有三个对称面，且这三个对称面都是坐标平面的话，则 21 个附加质量中有 15 个元素为零，剩下非零元素只有 $21 - 15 = 6$ 个，它们是对角线元素 m_{ii} 。



3) 附加质量与流体动能的关系

假设物体沿 6 个方向运动(3个平动, 3个转动), 运动速度(角速度)为 U_i ($i = 1, \dots, 6$), 对应的速度势为 $U_i \Phi_i$ (Φ_i 为 $U_i = 1$ 时的速度势)。根据线性叠加原理, 总的速度势为 $\phi = U_i \Phi_i$ 。因此物体运动引起流体运动的动能(kinetic energy of fluid) 为:

$$\begin{aligned} E_F &= \iiint_V \frac{1}{2} \rho V^2 dV = \frac{1}{2} \rho \iiint_V (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) dV = \frac{1}{2} \rho \iiint_V (U_i \nabla \Phi_i \cdot U_j \nabla \Phi_j) dV \\ &= \frac{1}{2} \rho U_i U_j \iiint_V (\nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j) dV = \frac{1}{2} U_i U_j m_{ij} \end{aligned}$$

$$E_F = \frac{1}{2} U_i U_j m_{ij}$$



4) 附加质量系数

为了方便，把附加质量与物体在流体中所占据空间的流体质量的比值，称为**附加质量系数(added mass coefficient)**:

$$C_m = \frac{m_A}{\rho V}$$

这里 m_A 是附加质量， ρ 是流体密度， V 是物体体积。

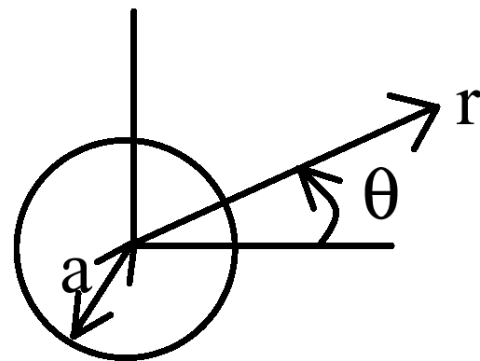
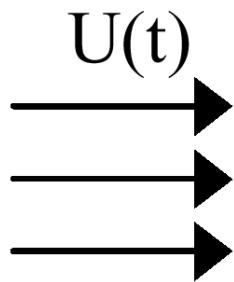


固定物体在非定常势流中的绕流流动

前面考虑了在静止流体中，物体作加速运动时，会产生附加惯性力。如果物体固定，但来流是非定常的，此时的物体绕流流动中，物体是否会受到流体作用力？是否也有附加质量？

考虑一个三维圆球固定不动，在非定常来流中的绕流问题。对于圆球在定常流中的绕流问题，已经得到了它的速度势，只需把定常来流 U 改成非定常来流 $U(t)$ ：

$$\phi = U(t) \cos \theta \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right)$$





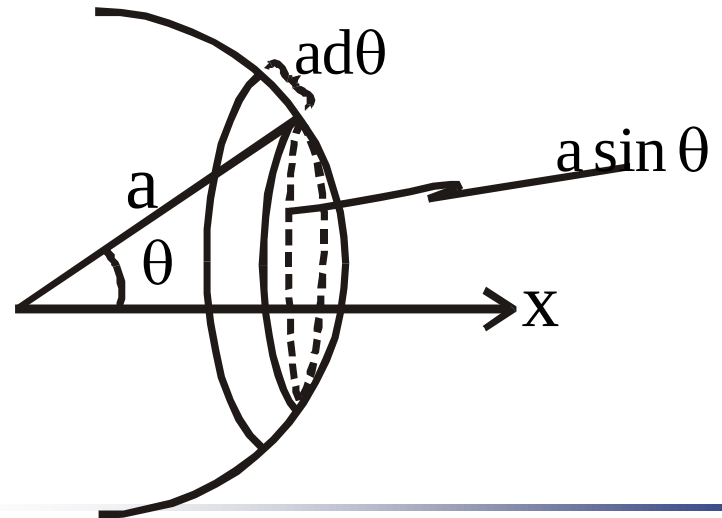
有了速度势，就可以计算下面的量：

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{r=a} = \dot{U} \left. \frac{3a^3 \cos \theta}{2r^2} \right|_{r=a} = \frac{3}{2} \dot{U} a \cos \theta$$

$$\nabla \phi|_{r=a} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) = \left(0, -\frac{3}{2} U \sin \theta, 0 \right)$$

$$\left. \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \right|_{r=a} = \frac{9}{8} U^2 \sin^2 \theta$$

$$\iint_B dS = \int_0^\pi (a d\theta) (2\pi a \sin \theta)$$





由动力学条件，圆球受的水平方向上的流体作用力为：

$$\begin{aligned} F_x &= -\rho \iint_B \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \Pi - C(t) \right) n_x dS \\ &= -\rho \int_0^\pi \left(\underbrace{\frac{3}{2} \dot{U} a \cos \theta}_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} + \underbrace{\frac{9}{8} U^2 \sin^2 \theta}_{\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2} \right) \left(\underbrace{-\cos \theta}_{n_x} \right) \left(\underbrace{2\pi a^2 \sin \theta d\theta}_{dS} \right) \\ &= 3\pi \rho \dot{U} a^3 \underbrace{\int_0^\pi (\sin \theta \cos^2 \theta) d\theta}_{2/3} + \rho U^2 \frac{9\pi}{4} a^2 \underbrace{\int_0^\pi (\sin^3 \theta \cos \theta) d\theta}_0 \\ &= \dot{U}(t) [2\rho\pi a^3] = \dot{U}(t) \left[\frac{4}{3} \rho\pi a^3 + \frac{2}{3} \rho\pi a^3 \right] = \dot{U}(t) (\rho V + m_{(1)}) \end{aligned}$$



固定物体在非定常势流中的绕流流动

即圆球受的水平方向上的流体作用力由两部分组成，一部分是静止流体中，物体作加速运动所产生的附加惯性力；另一部分是物体所占据空间的流体部分作加速运动的惯性力：

$$F_x = \dot{U}(t) \left(\rho V + m_{(1)} \right) = \dot{U}(t) m_{(2)}$$

固定物体在非定常来流中的绕流流动，物体会受到流体作用力，也可以定义附加质量(系数)，它由两部分组成，一部分是静止流体中，物体作加速运动所引起的附加质量；另一部分是物体所占据空间的流体质量：

$$m_{(2)} = \rho V + m_{(1)}$$

$$C_{m_{(2)}} = 1 + C_{m_{(1)}}$$



(2)

$U(t)$

$\neq$

$U(t)$

$m_{(1)}$

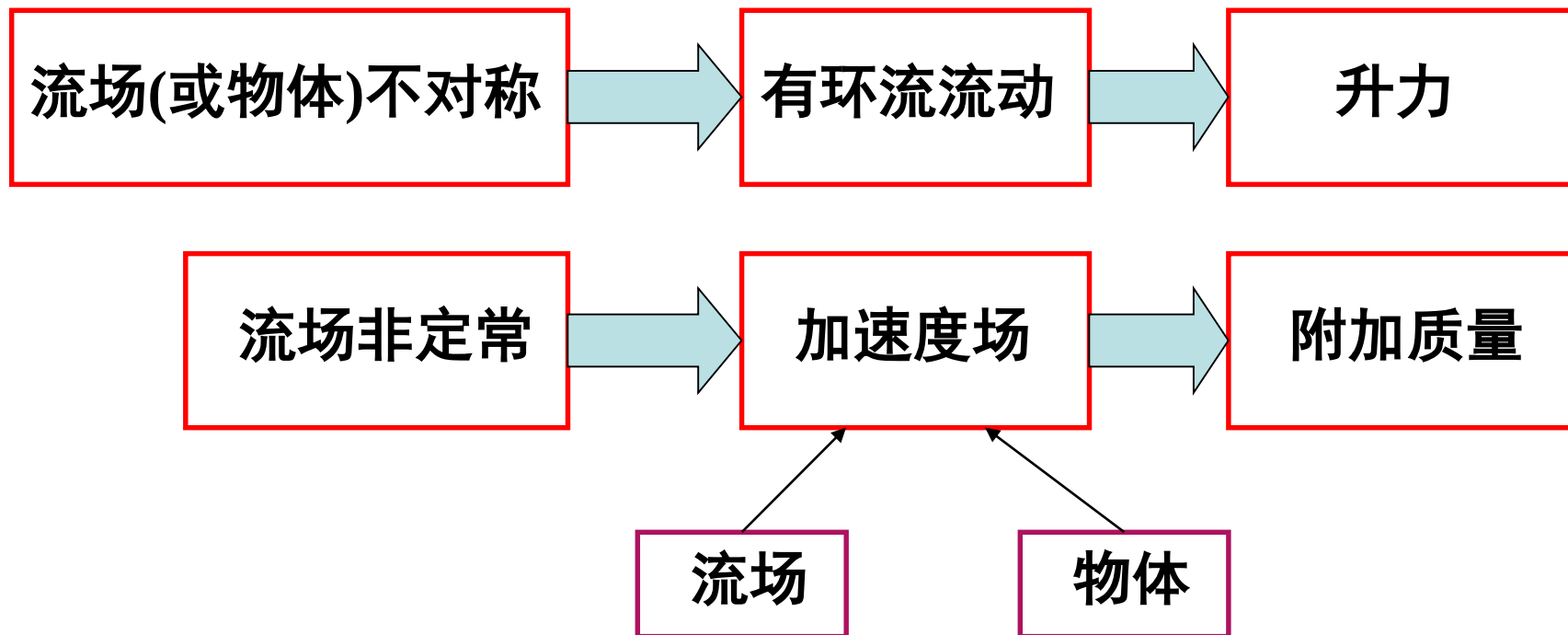
$m_{(2)}$

$m_{(1)}$

$m_{(1)} + \rho \forall$

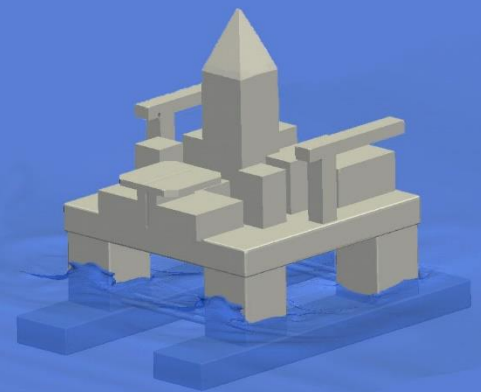
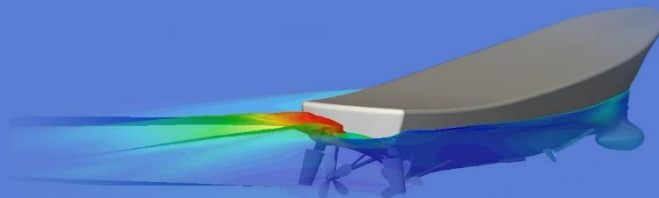


在什么情况下，势流流场中，物体将受到流体的作用力？



CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

<http://dcwan.sjtu.edu.cn>



*部分素材来源于网络