



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主讲人：万德成

章节：第7章 水波基本理论

内容：7.2 水波问题的基本控制方程



水波问题的基本控制方程

通常讨论的水波问题，都基于下面三个假定条件：

1. 水是无粘性 (不考虑水粘性);
2. 水是不可压缩流体;
3. 水波运动流场是无旋的。



水波问题是理想不可压缩流体的无旋运动问题



水波问题必须满足不可压势流运动的基本控制方程



水波问题的基本控制方程

在第六章，已得到不可压势流运动的基本控制方程为：

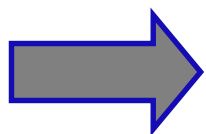
$$\begin{array}{l} \text{基本方程} \\ \text{动力学条件} \\ \text{运动学条件} \\ \text{无穷远处条件} \\ \text{初始条件} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi = C(t) \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{U}_n \quad (\text{物面条件}) \\ \nabla \phi = \mathbf{U}_\infty, \quad p = p_\infty \\ \nabla \phi|_{t=0} = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \quad p|_{t=0} = p_0(\mathbf{x}) \end{array} \right.$$



水波问题的基本控制方程

对水波问题，需要求解的量除了速度和压力外，还有自由面位置。取 Oxz 坐标平面与静止时的水面重合， y 轴垂直向上。

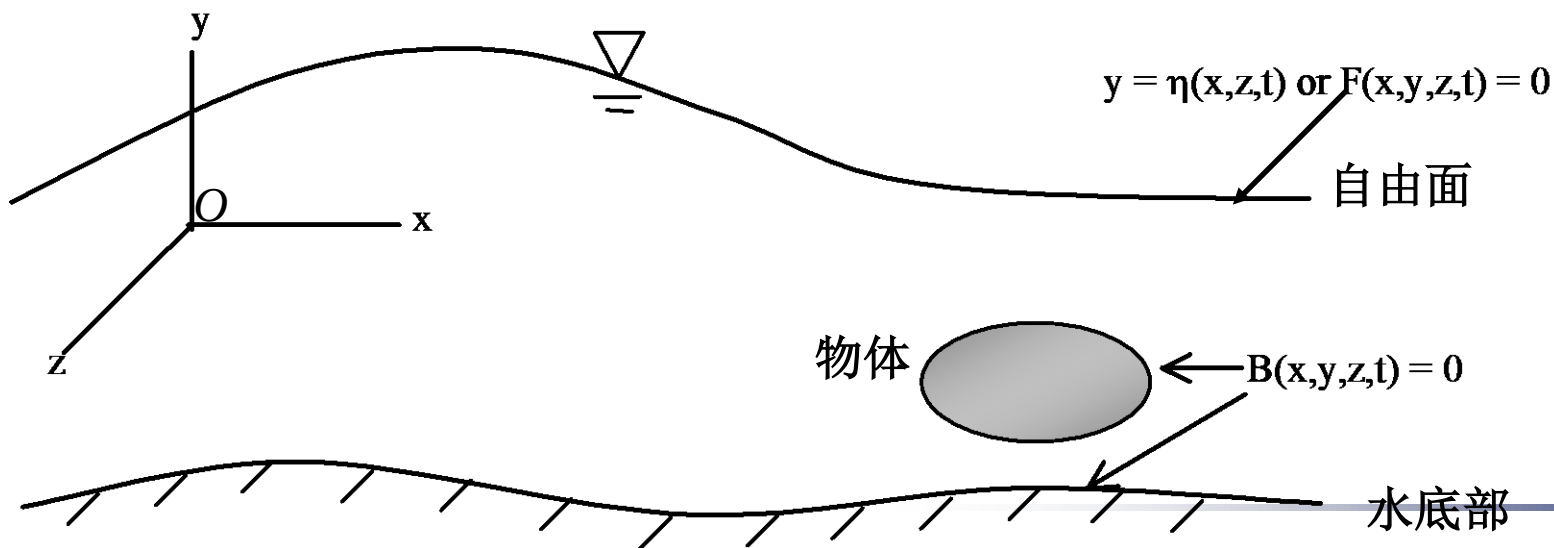
要求解的量



a) 速度(或速度势) $\mathbf{V} = \nabla \phi$

b) 自由面位置 $y = \eta(x, z, t)$

c) 压力分布 $p(x, y, z, t)$

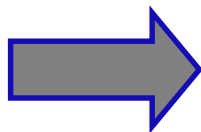




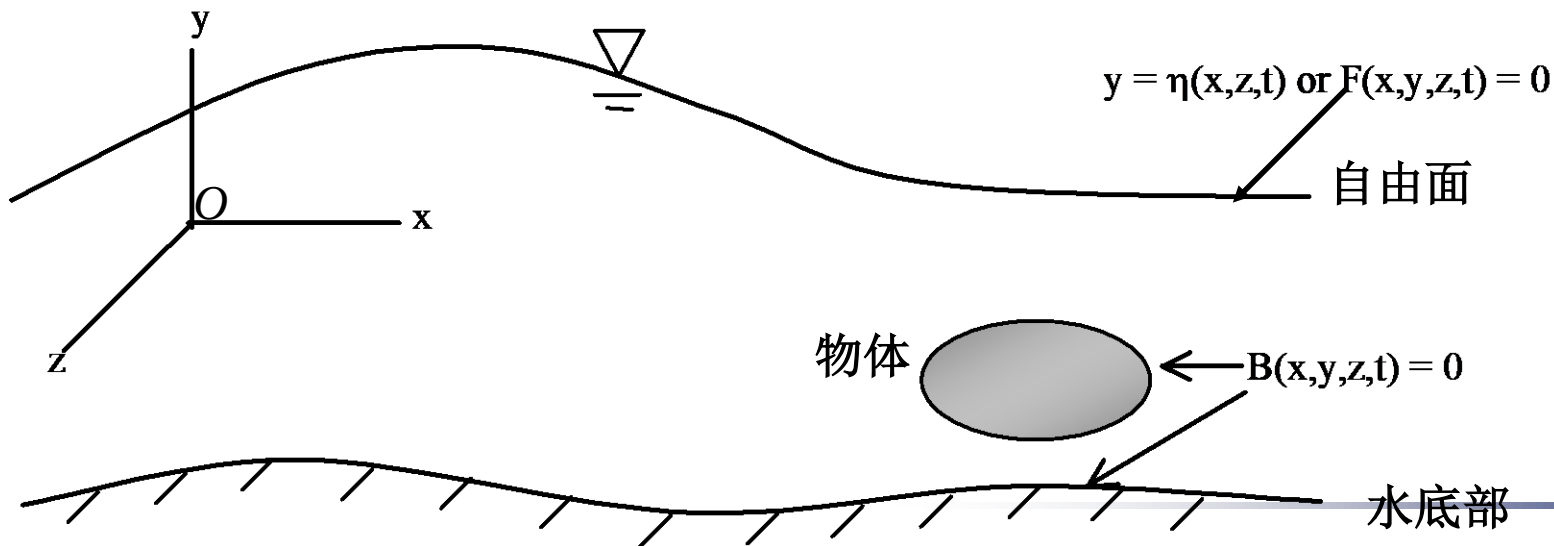
水波问题的基本控制方程

水波问题同样必须满足势流的控制方程，但运动学条件，除了满足物面运动学条件，还要满足水底运动学条件和自由面运动学条件。

运动学条件



- a) 物面运动学条件
- b) 水底部运动学条件
- c) 自由面运动学条件





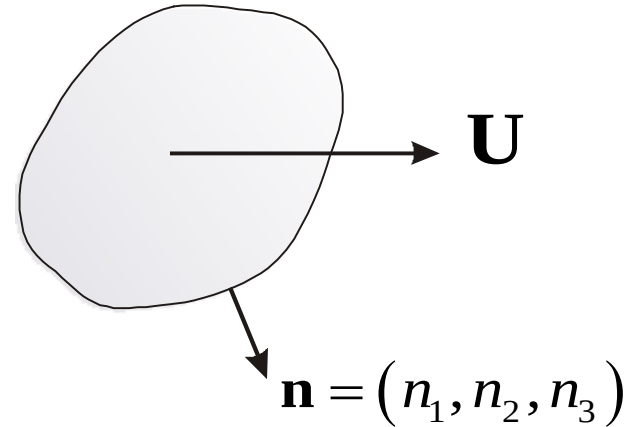
水波问题的基本控制方程

a) **物面运动学条件**：流体不可以穿透物面，即

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = U_n$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = U_n$$

在物面 B 上。



也可以从另一个角度得到物面条件：由 $B(x, y, z, t) = 0$ 得：

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) B = \frac{\partial B}{\partial t} + (\nabla \phi \cdot \nabla) B = 0$$

在物面 B 上。



水波问题的基本控制方程

b) **水底部运动学条件**：流体不可以穿透水底面，即

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0$$

在水底部 $y = -h$ 上：

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0$$

假设水底部是一个水平面，则有 $B(x, y, z, t) = y + h = 0$

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + (\nabla \phi \cdot \nabla) B = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

在水底部 $y = -h$ 上：

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$



水波问题的基本控制方程

c) **自由面运动学条件**: 自由面是一种特殊的界面, 在界面上的流体质点同样不能穿透界面, 即自由面上的流体质点的法向速度必须与自由面的法向速度相同。

假设自由面由 $y = \eta(x, z, t)$ 表示, 或

$$F(x, y, z, t) = y - \eta(x, z, t) = 0$$

则有: $\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\nabla \phi \cdot \nabla) F = 0$ 在自由面 $y = \eta$ 上。

$$\frac{\partial(y - \eta)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial(y - \eta)}{\partial x}, \frac{\partial(y - \eta)}{\partial y}, \frac{\partial(y - \eta)}{\partial z} \right) = 0$$



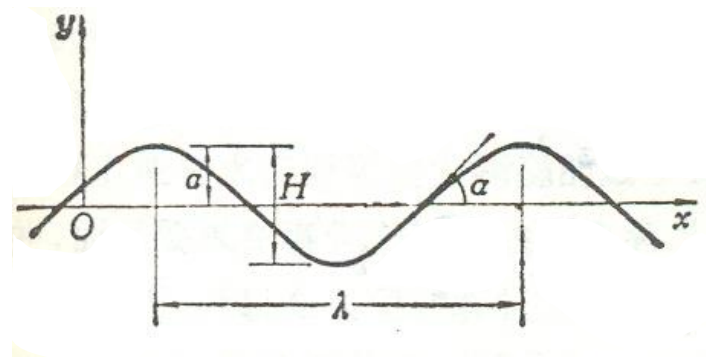
水波问题的基本控制方程

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

流体速度分量

波面倾斜度



在自由面 $y = \eta$ 上。

这就是自由面上的运动学条件。由于自由面位置 $y = \eta$ 和速度势未知，因此它是一个非线性方程，且与自由面的时间变化有关。更为困难的是，自由面运动学条件要在未知的自由面上满足，而自由面位置本身是需要求解的。



水波问题的基本控制方程

无穷远处条件：流体静止，不受扰动，有

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} \rightarrow 0 \\ \mathbf{V} = \nabla \phi \rightarrow 0 \\ p = p_a - \rho g y \end{array} \right.$$

大气压力

静水压力



水波问题的基本控制方程

动力学条件：质量力为重力，由第六章知道

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gy = C(t)$$

在无穷远处静水面，有 $p = p_a, y = 0$ ，因此

$$C(t) = \frac{p_a}{\rho}$$

从而得到水波的动力学条件 (当 $y \leq \eta(x, z, t)$) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{p - p_a}{\rho} + gy = 0$$

可用这个
方程求出
流场的压
力分布。



水波问题的基本控制方程

在自由面上，有 $y = \eta(x, z, t)$, $p = p_a$ ，动力学条件变为：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + g\eta = 0$$

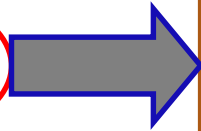
这就是自由面上的动力学条件。它是一个非线性方程条件。如果速度势求解出来，可用这个方程求出自由面的位置 $y = \eta$ 。



7.3 水波的基本控制方程

初始条件:

要求解的量



a) 速度(或速度势) $\mathbf{V} = \nabla \phi$

b) 自由面位置 $y = \eta(x, z, t)$

c) 压力分布 $p(x, y, z, t)$

压力不是独立量，它可由速度势得到，只有速度势和自由面位置为独立求解量，因此需给出它们的初始条件。由于Laplace方程是边值问题，不需给出全场初始条件，只需给出自由面上的初始条件即可：

$$\phi(x, \eta, z, 0) = f(x, z), \quad \eta(x, z, 0) = \zeta(x, z)$$

波浪的初始扰动源有两个：初始速度，初始位移。



水波问题的基本控制方程

水波的基本控制方程总结如下：

水波流场方程(field equations): 在 $y \leq \eta(x, z, t)$ 上满足。

基本方程 $\nabla^2 \phi = 0$

动力学条件
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{p - p_a}{\rho} + gy = 0$$

无穷远处条件
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \rightarrow 0, \quad \mathbf{V} = \nabla \phi \rightarrow 0, \quad p = p_a - \rho gy$$

初始条件
$$\begin{cases} \phi(x, \eta, z, 0) = f(x, z) \\ \eta(x, z, 0) = \zeta(x, z) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{在 } y = \eta \\ \text{上满足} \end{array}$$



水波问题的基本控制方程

边界条件(boundary conditions):

物面条件 (在B上) $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{U}_n$ 或 $\frac{\partial B}{\partial t} + (\nabla \phi \cdot \nabla) B = 0$

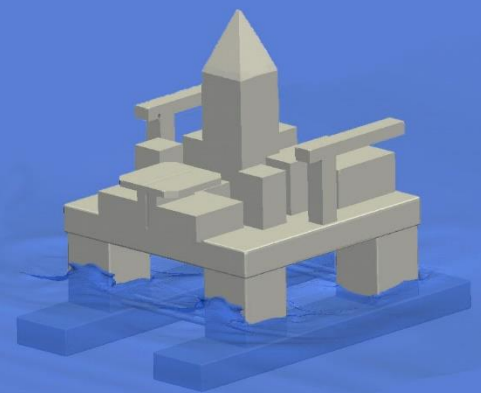
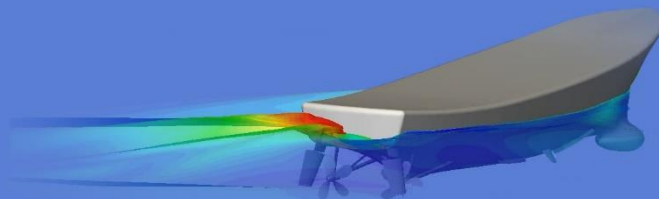
水底部条件 (在 $y = -h$ 上) $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$

自由面运动学条件 (在 $y = \eta$ 上) $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z}$

自由面动力学条件 (在 $y = \eta$ 上) $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + g\eta = 0$

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

<http://dcwan.sjtu.edu.cn>



*部分素材来源于网络