



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主讲人：万德成

章节：第7章 水波基本理论

内容：7.3 Airy波及其特征



Airy 波

上一节给出的水波基本控制方程，是任何势流水波运动问题都必须满足的方程。求解这组方程，是十分困难的，因为：

1. 自由面运动学和动力学条件都是非线性的。
2. 自由面运动学和动力学条件必须在未知的自由面上满足。

自由面运动学条件 (在 $y = \eta$ 上)

自由面上

自由面动力学条件 (在 $y = \eta$ 上)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

非线性

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + g\eta = 0$$



Airy 波

上一节给出的水波基本控制方程，是任何势流水波运动问题都必须满足的方程。求解这组方程，是十分困难的，因为：

1. 自由面运动学和动力学条件都是非线性的。
2. 自由面运动学和动力学条件必须在未知的自由面上满足。



Airy波 (也称微幅波，即波幅与波长相比为小量， $\frac{A}{\lambda} \ll 1$)



1. 非线性的自由面运动学和动力学条件可以线性化。
2. 自由面运动学和动力学条件可以固定在静水面上满足。

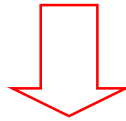


Airy 波

在Airy波情况下，波面位置 η 的变化是小量，波浪中流体质点的运动速度也是小量。它们自乘或互乘所得的二阶以上的项可作为高阶小量而略去。

由于 η 是小量，原来要在未知的自由面 $y = \eta$ 上满足的边界条件也可以改在静水面 $y = 0$ 上来满足。因此：

自由面运动学条件(在 $y = \eta$ 上) $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z}}$



$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (\text{在 } y = 0 \text{ 上})$$



Airy 波

自由面动力学条件(在 $y = \eta$ 上)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + g\eta = 0$$

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{在 } y = 0 \text{ 上})$$

由自由面运动学和动力学条件(在 $y = 0$ 上)可以得到:

$$g \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

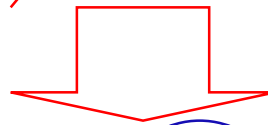
$y = 0$ $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$
 $\nabla^2 \phi = 0$
 $y = -h$ $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$



Airy 波

流场动力学条件:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \cancel{\frac{|\nabla \phi|^2}{2}} + \frac{p - p_a}{\rho} + gy = 0$$



$$p - p_a = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho gy$$

动压力(dynamic pressure)

静压力(hydrostatic pressure)



Airy 波

Airy波(微幅波), 即线性化后的控制方程为:

水波流场方程(field equations): 在 $y \leq \eta(x, z, t)$ 上满足。

(1) 基本方程 $\nabla^2 \phi = 0$

(2) 动力学条件 $p - p_a = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho g y$

(3) 无穷远处条件 $\frac{\partial \phi}{\partial t} \rightarrow 0, \quad \mathbf{V} = \nabla \phi \rightarrow 0, \quad p = p_a - \rho g y$

(4) 初始条件
$$\begin{cases} \phi(x, 0, z, 0) = f(x, z) \\ \eta(x, z, 0) = g(x, z) \end{cases}$$



边界条件(boundary conditions):

(5) 物面条件 (在B上) $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{U}_n$ 或 $\frac{\partial B}{\partial t} + (\nabla \phi \cdot \nabla) B = 0$

(6) 水底部条件 (在 $y = -h$ 上) $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$

(7) 自由面条件 (在 $y = 0$ 上)
$$\begin{cases} g \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \\ \eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{cases}$$



Airy 波

如果不考虑初始波是怎么产生，而且流场中不存在物体，那么微幅波 (Airy波)的速度势实际上是可以由下面三个方程求解得到

(1) 控制方程

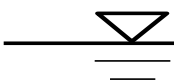
(6) 水底部条件(在 $y = -h$ 上)

(7) 自由面条件(在 $y = 0$ 上)

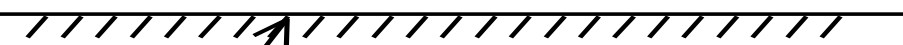
$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

$$g \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

$y = 0$  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$y = -h$  $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$



Airy 波

上面三个方程，可采用分离变量法(separation of variables) 对速度势进行求解。

Airy波速度势的求解结果为：

$$\phi = \frac{gA}{\omega} \sin(kx - \omega t) \frac{\cosh k(y + h)}{\cosh kh}$$

当水深趋于无限，即 $h \rightarrow \infty$ ，此时的速度势为：

$$\phi = \frac{gA}{\omega} \sin(kx - \omega t) e^{ky}$$



Airy 波

由自由面动力学条件，可得Airy波面为：

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \bigg|_{y=0} = A \cos(kx - \omega t)$$

由动力学条件，可得Airy波流场压力分布为：

$$\begin{aligned} p - p_a &= -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho g y \\ &= -\rho g y - \rho A g \cos(kx - \omega t) \frac{\cosh k(y + h)}{\cosh kh} \end{aligned}$$



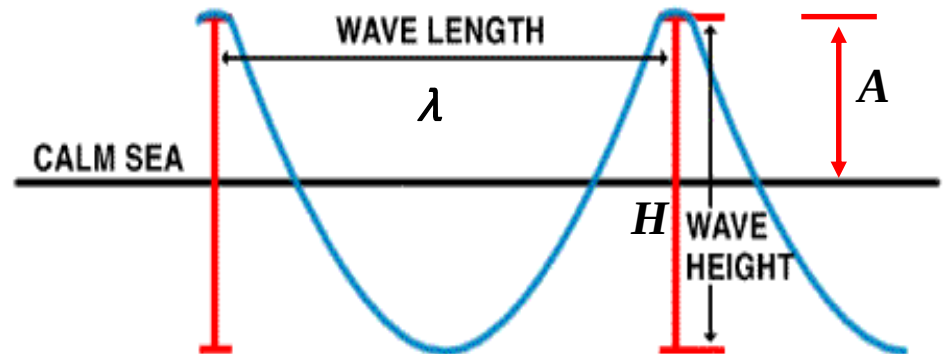
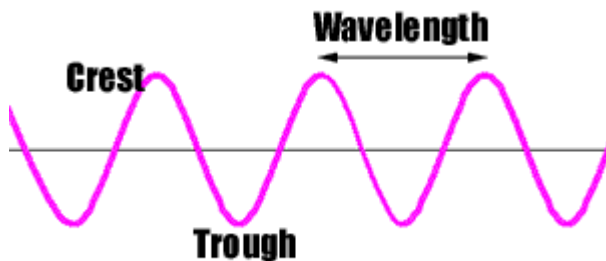
Airy 波

对Airy波的解，有三个参数 (A , k , ω) 需要定义，实际上由于色散关系， k 和 ω 是相互关联的，因此只有两个参数(A , k) 需要初始条件确定：

$$\eta = A \cos(kx - \omega t)$$

(1) Airy波是二维余弦曲线，因此也称为线性简谐波。

A 就是波幅(wave amplitude)，它的两倍就是波高 $H = 2A$ (wave height)。两个相邻波峰(crest)(或波谷(trough))之间的距离称为波长 λ (wave length)。





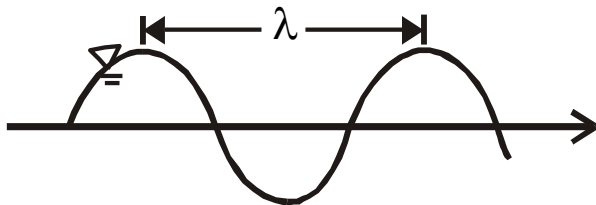
(2) k 是波数(wave number)。

对简谐波，令 $t = 0$ ，可得空间上周期变化的余弦函数：

$$\eta = A \cos(kx) \quad kx = 2\pi n \quad (n \text{ 为整数})$$

利用一个周期 $n = 1$ ，波长 $x = \lambda$ ，可得波数 k ，即在一个周期 2π 内所含波的个数：

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$



$$k = \text{wavenumber} = 2\pi/\lambda \quad [\text{L}^{-1}]$$



(3) ω 是圆周频率(frequency)。

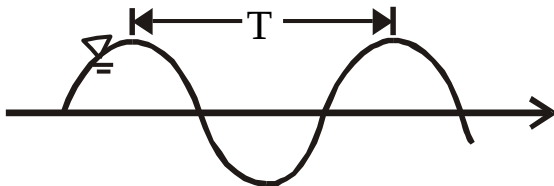
对简谐波，令 $x = 0$ ，可得时间上周期变化的余弦函数：

$$\eta = A \cos(\omega t) \quad \omega t = 2\pi n \quad (n \text{ 为整数})$$

利用一个周期 $n = 1$ ，波周期(period) $t = T = 1/f$ ，可得圆周频率 ω ，即在一个周期 2π 内波的振动次数：

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$\text{这里 } T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$



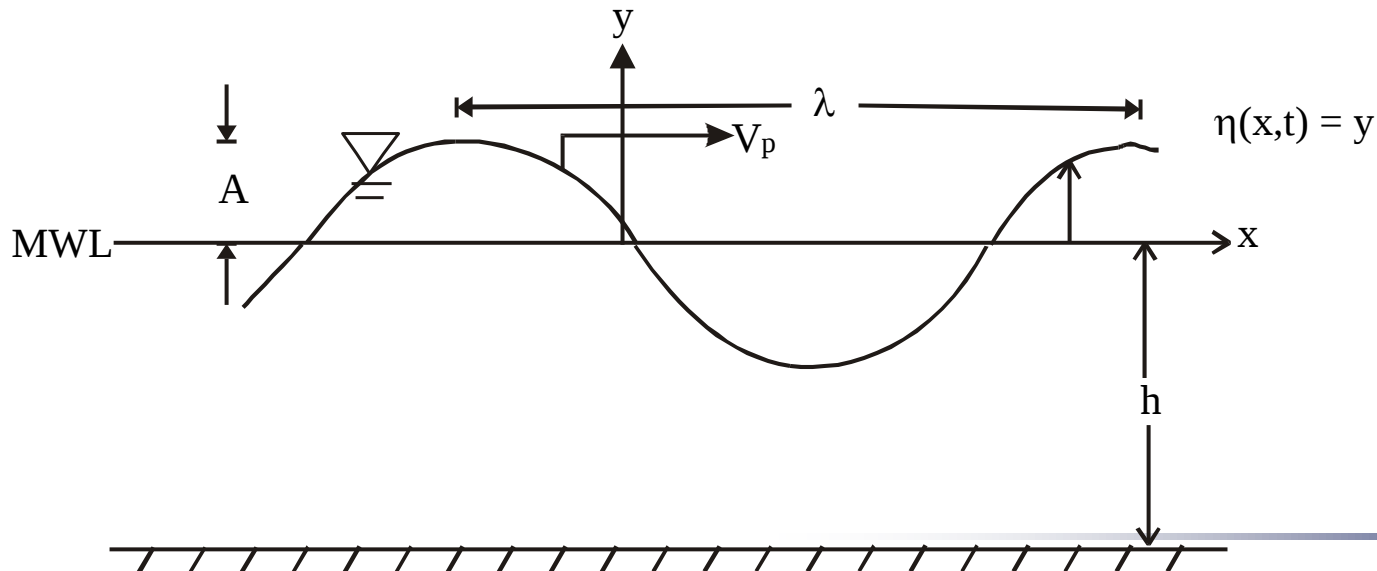
$$\omega = \text{frequency} = 2\pi/T \quad [T^{-1}], \text{ e.g. rad/sec}$$



(4) **波速** (wave velocity), 也称**相速**(phase velocity)。

波速(c 或 V_p)的定义: 波长与波周期的比值, 即在一个波周期内, 完成经历一个波长距离的速度。

$$c = V_p = \frac{\lambda}{T}$$





Airy 波

由于 $\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{T} = c$

把简谐波改写成：

$$\eta = A \cos(kx - \omega t) = A \cos \left[k \left(x - \frac{\omega}{k} t \right) \right] = A \cos [k(x - ct)]$$

因此波速与波长、波周期、圆周频率、波数的关系为：

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$



Airy 波

(5) **色散关系** (dispersion relationship): **圆周频率与波数**的关系。

把Airy波的速度势代入线性化的自由面条件，即

Airy波速度势
$$\phi = \frac{gA}{\omega} \sin(kx - \omega t) \frac{\cosh k(y + h)}{\cosh kh}$$

线性化自由面条件
$$g \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{在 } y = 0 \text{ 上满足})$$

可以得到:
$$-\omega^2 \cosh kh + gk \sinh kh = 0$$

即Airy波的色散关系:

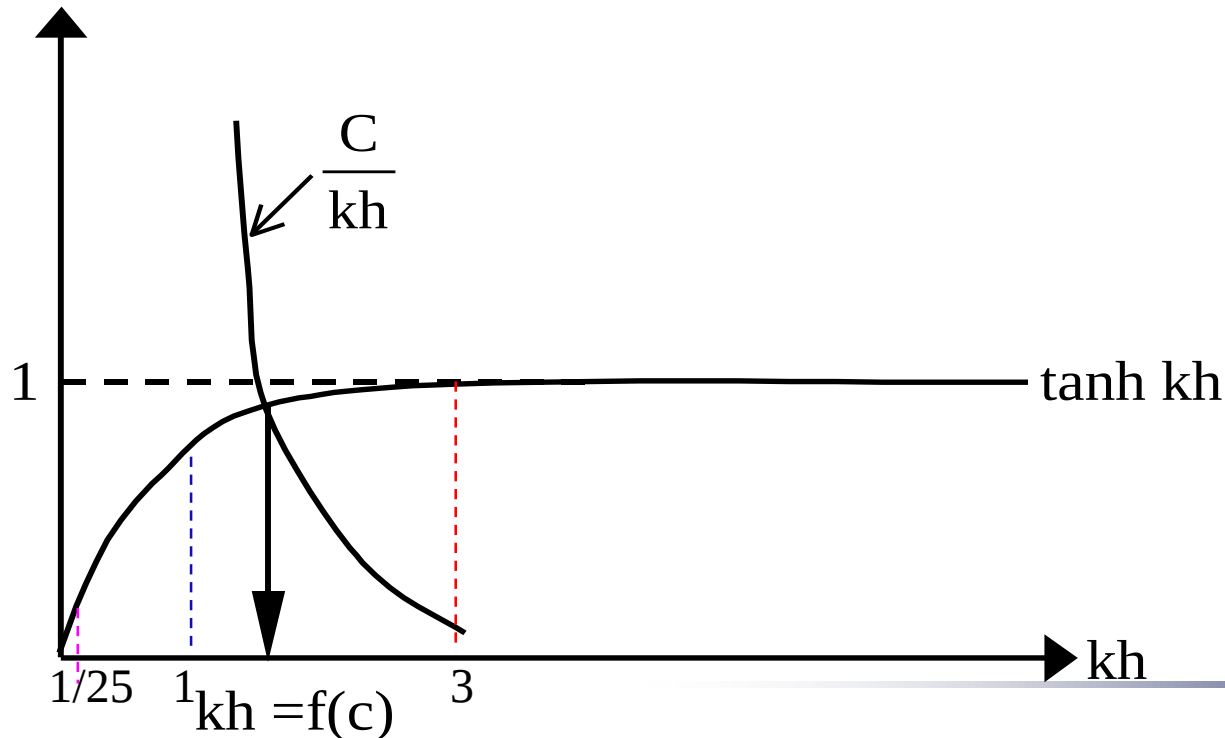
$$\omega^2 = gk \frac{\sinh kh}{\cosh kh} = gk \tanh kh$$



Airy 波

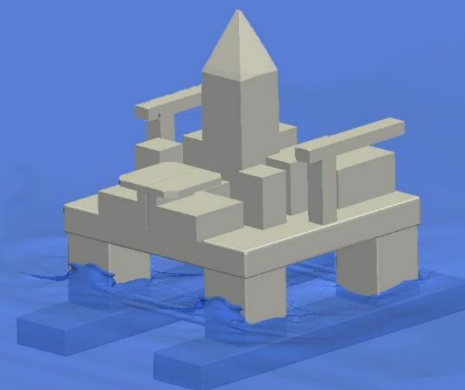
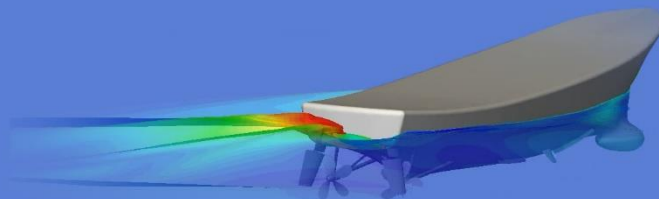
通过色散关系，如果知道水深和波数，求圆周频率比较容易；但如果知道圆周频率和水深，要求解波数就比较困难。可采用下面两条函数曲线相交的方法来求解。把色散关系改写成：

$$C = \frac{\omega^2 h}{g} = (kh) \tanh(kh) \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{kh} = \tanh(kh)$$



CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

<http://dcwan.sjtu.edu.cn>



*部分素材来源于网络