SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主 讲 人：万德成

章节：第8章 粘性流体力学基本理论

内容：8.2 粘性流动的基本控制方程

粘性流动的基本控制方程

对于水动力学，一般只考虑不可压粘性流体的流动问题。对于不可压粘性流体流动的基本控制方程，我们在第三章流动动力学中已推导给出Navier-Stokes方程，简称NS方程：

连续方程

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

动量方程

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{V}$$

再加上边界条件和初始条件，就构成了不可压粘性流体流动的基本控制方程。

粘性流动的基本控制方程

或用Einstein指标法表示：

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

(I) (II) (III) (IV) (V)

或：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

这里 $\nu = \mu/\rho$ **是运动粘性系数(kinematic viscosity)。**

粘性流动的基本控制方程

先看NS动量方程各项的物理意义：

(I) – 局部加速度 (local acceleration);

(II) – 变位加速度(convective acceleration)，惯性项(inertia)，对流项(convection)，非线性项(nonlinear term of the equation);

(III) – 压力梯度(pressure gradient);

(IV) – 体积力或重力(volume force or gravity);

(V) – 粘性扩散项(viscous diffusion of momentum owing to molecular viscosity of the fluid).

粘性流动的基本控制方程

NS方程在直角坐标下(Rectangular Coordinates (*x*, *y*, *z*))的表示：

连续方程： $$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

***x*方向动量方程：** $$\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+g_x$$

***y*方向动量方程：** $$\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)+g_y$$

***z*方向动量方程：** $$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)+g_z$$

粘性流动的基本控制方程

NS方程在柱坐标下(Cylindrical Coordinates (r,θ, z))的表示：

连续方程：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

***r*-分量：**

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta^2}{r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right]+g_r$$

***θ*-分量：**

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r u_\theta}{r}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}$$

$$=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right]+g$$

***z*-分量：**

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

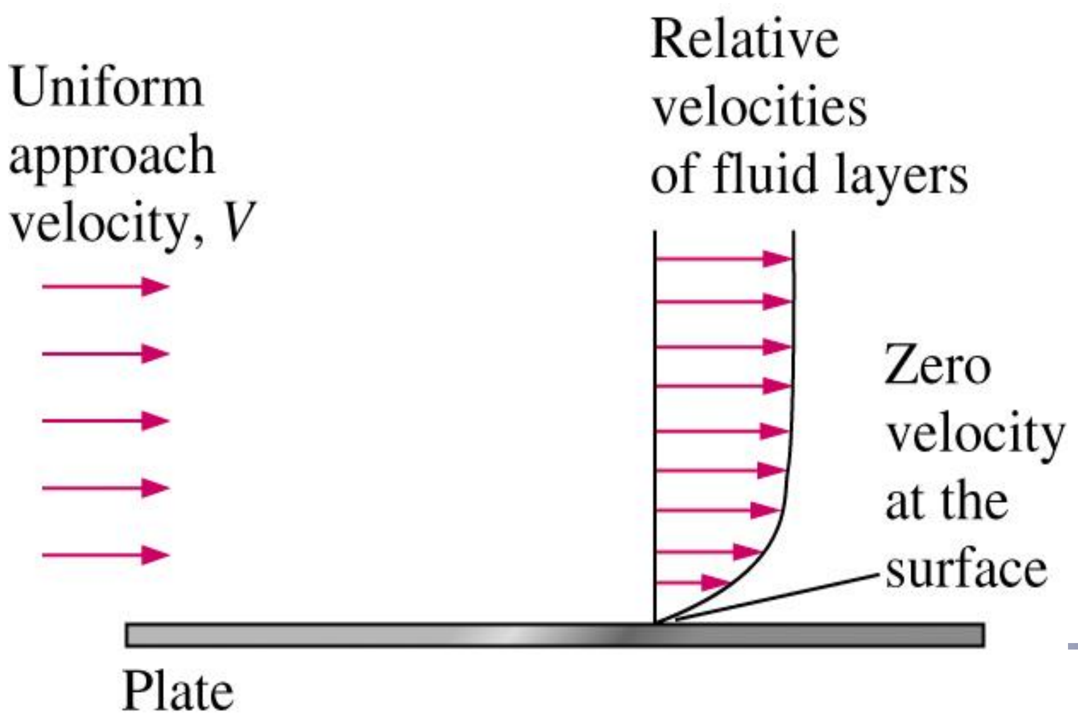
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]+g_z$$

粘性流动的基本控制方程

边界条件：

1) 物面不可滑移条件：与物面接触的流体质点速度等于物体物面的运动速度。

$$\mathbf{V}_{\text{fluid}} = \mathbf{V}_{\text{solid}} \qquad \text{沿流体一物体交界面}$$



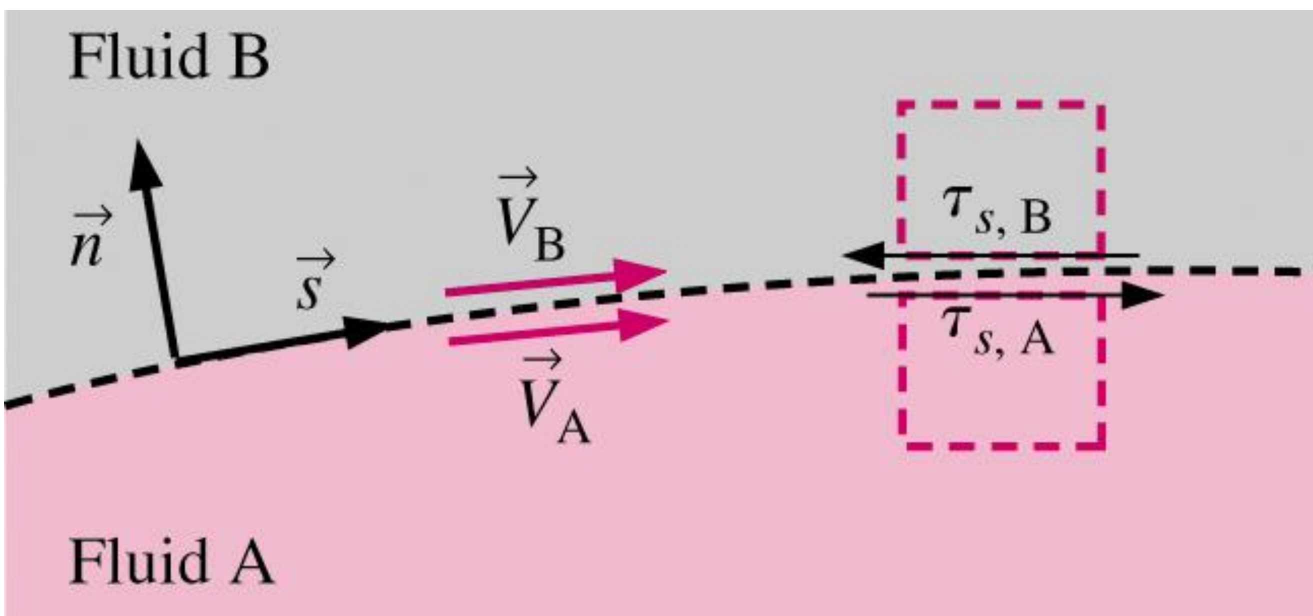
粘性流动的基本控制方程

2) 两种流体接触面条件：在两种流体交界面上，速度(velocity)和应力(stress)要保持连续。

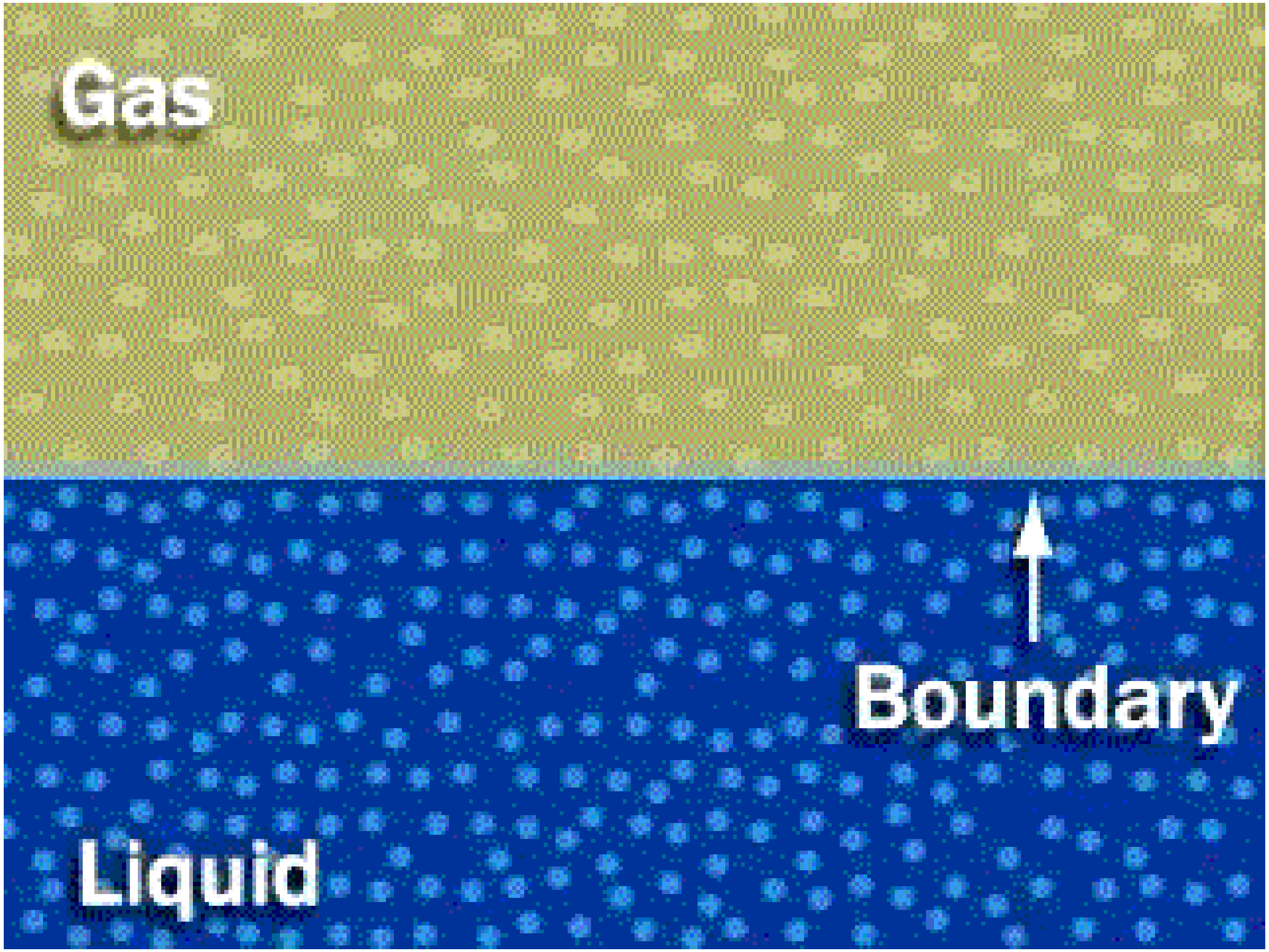
$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{B}}, \qquad \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{A}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{B}}$$

在流体一流体交界面

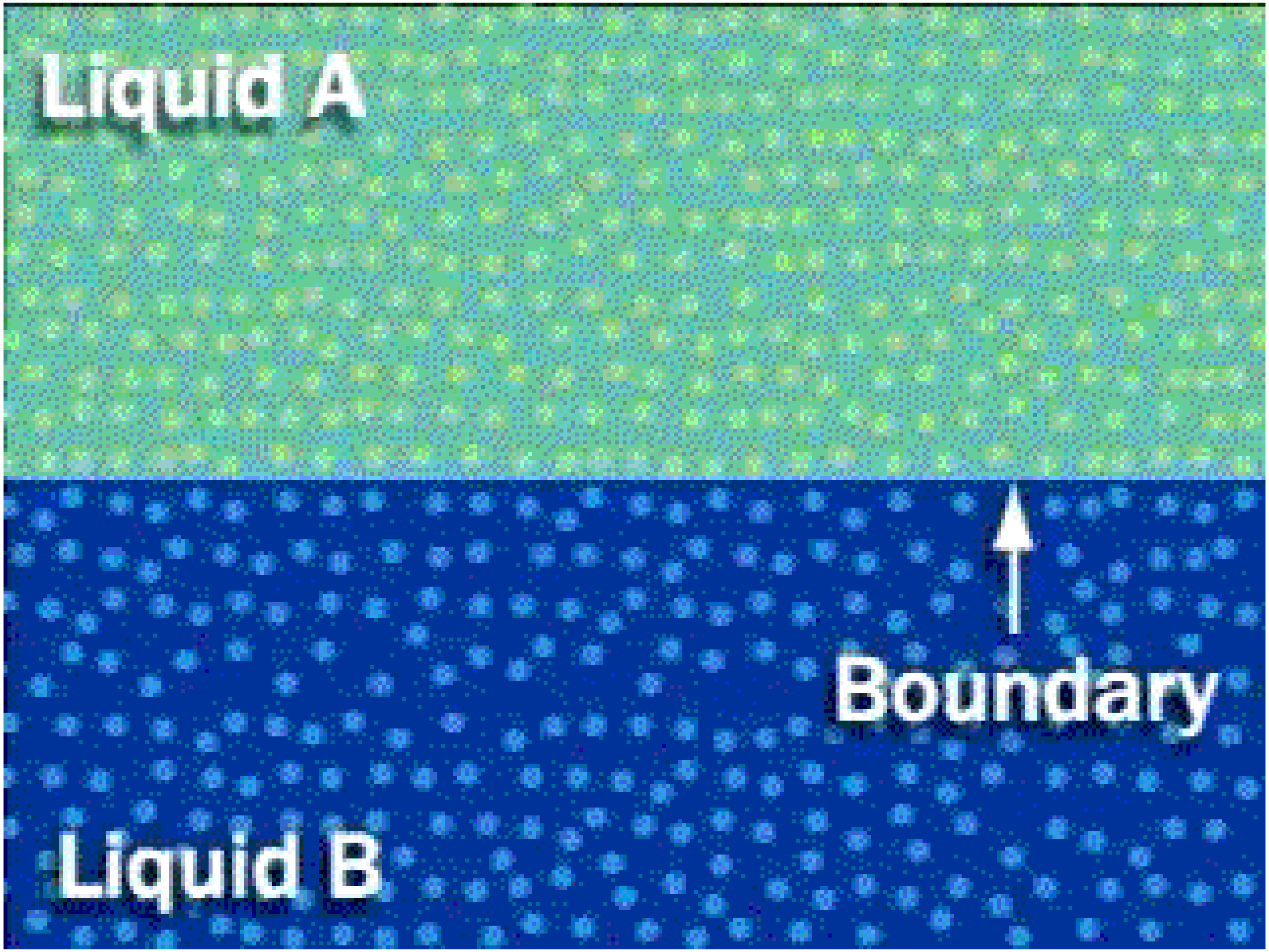
$$p_{\mathrm{A}} = p_{\mathrm{B}}, \qquad \mu_{\mathrm{A}} \left.\frac{du}{dy}\right|_{\mathrm{A}} = \mu_{\mathrm{B}} \left.\frac{du}{dy}\right|_{\mathrm{B}}$$



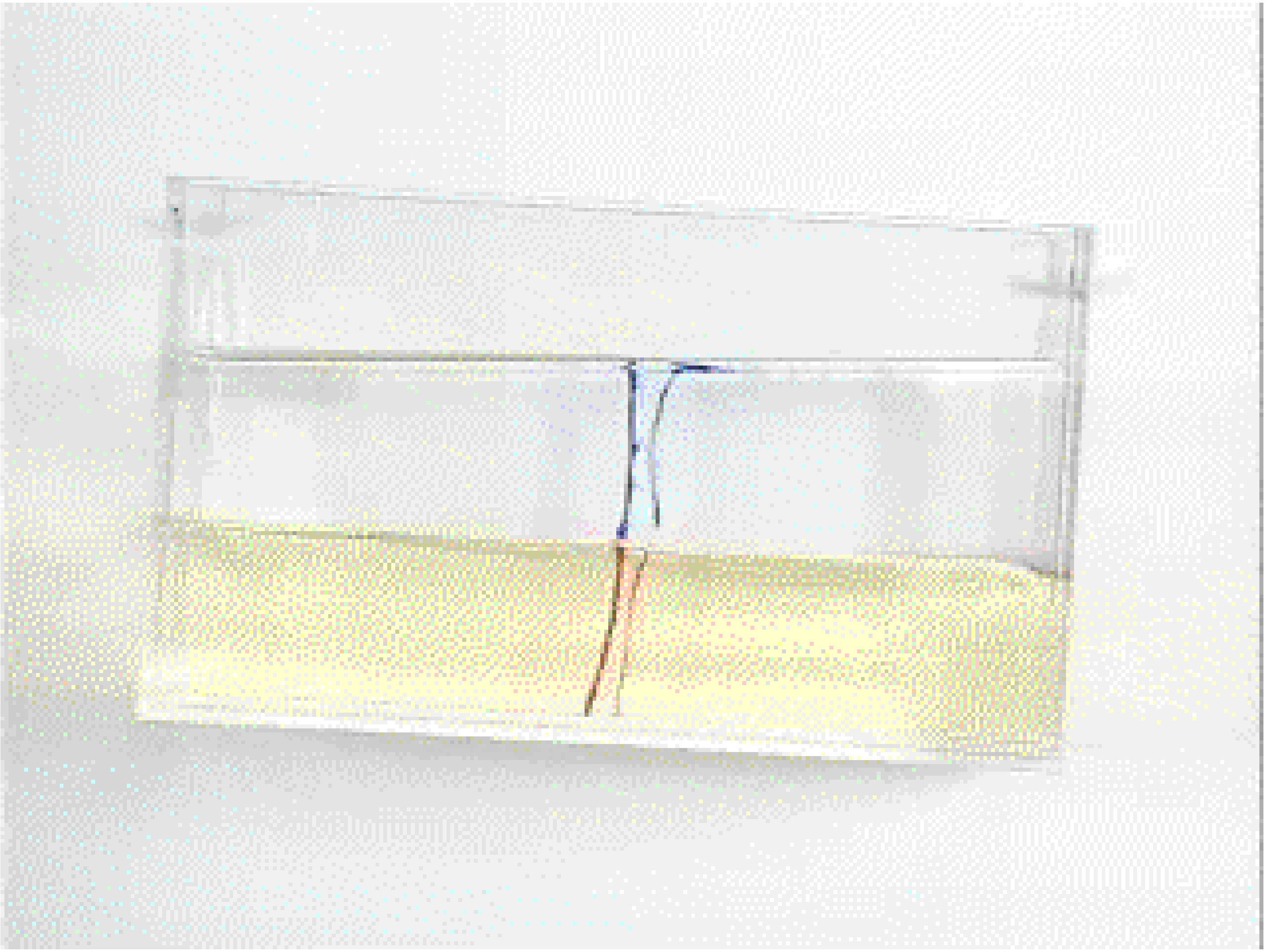
粘性流动的基本控制方程



粘性流动的基本控制方程



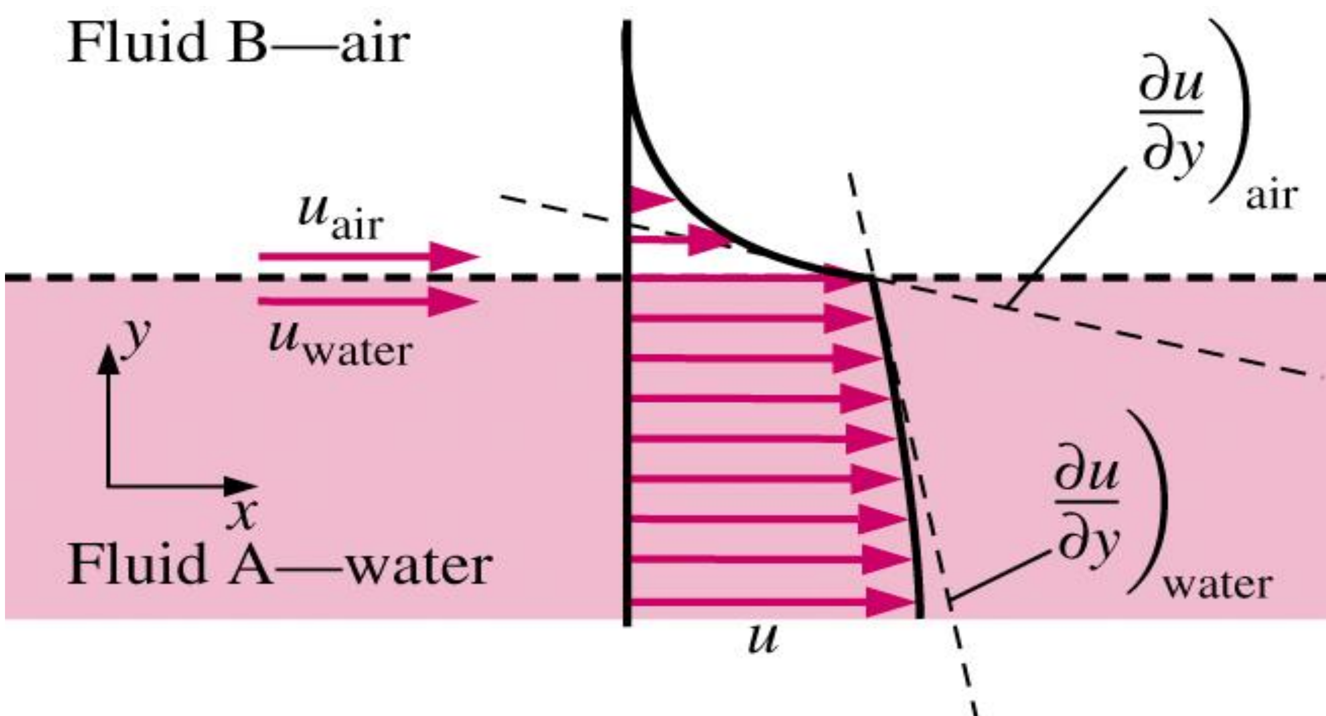
粘性流动的基本控制方程



粘性流动的基本控制方程

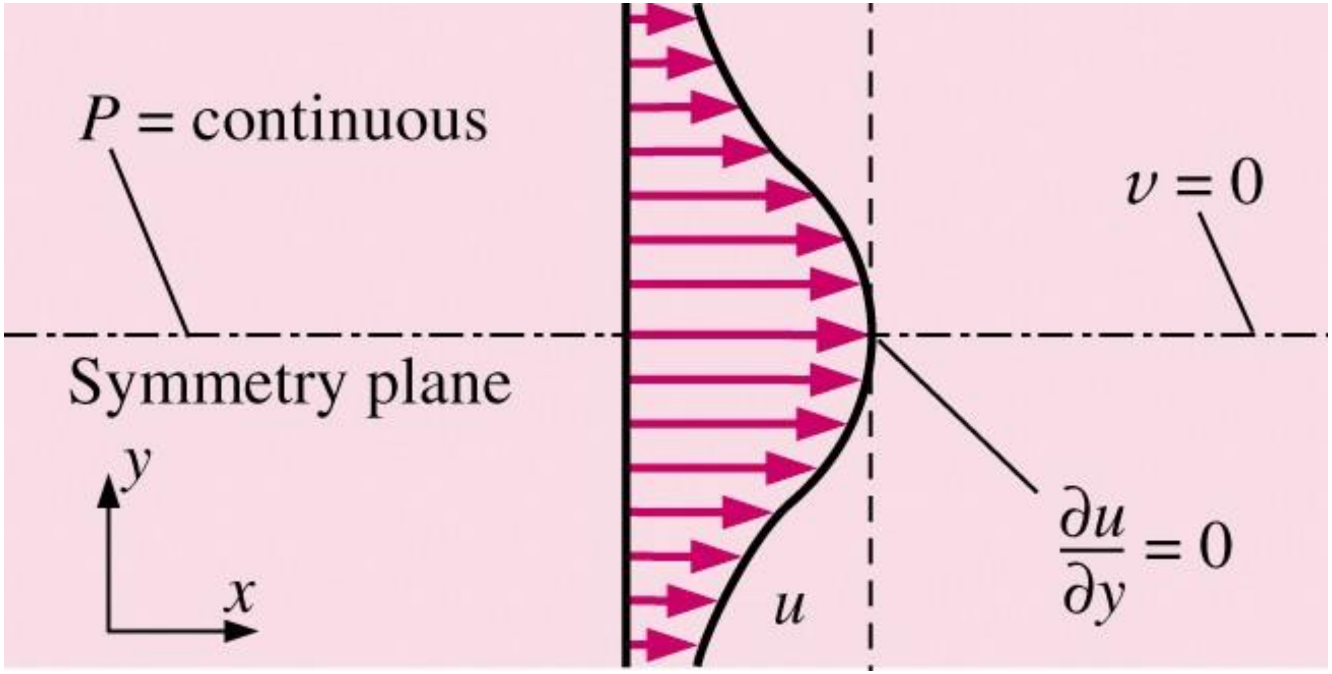
3) 自由面条件：是两种流体接触面条件的特例。由于 $\mu_{air} \ll \mu_{water}$，可忽略空气上的切应力。

自由面上： $u_{air} = u_{water}$， $p_{air} = p_{atmosphere}$， $\mu_{water} \left.\dfrac{du}{dy}\right|_{water} = 0$



粘性流动的基本控制方程

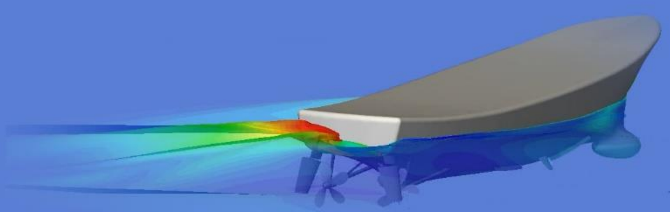
3) **其他边界条件：** 比如**入口边界条件**(inlet condition)，**出口边界条件**(outlet condition)，**周期边界条件**(periodic condition)，**对称边界条件**(symmetry)等。更加具体物理问题，具体设定。

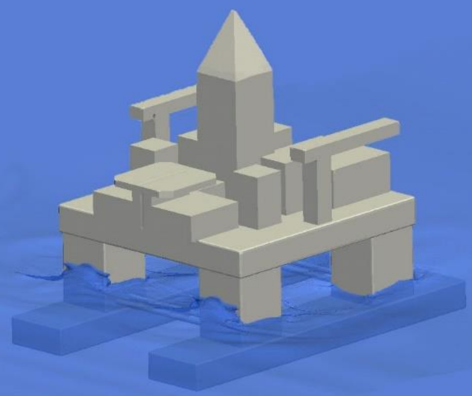


初始条件：如果流动问题是非定常的，则需要给出初始条件。

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

http://dcwan.sjtu.edu.cn





*部分素材来源于网络