课程：船舶流体力学

主 讲 人：万德成

章节：第8章 粘性流体力学基本理论

内容：8.3 Navier-Stokes方程的近似处理

N-S方程的近似处理

完整的Navier-Stokes（NS）方程求解非常困难，因为：

（1）对流项(变位导数、惯性项)是非线性项，因此NS方程是非线性方程。

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\boxed{\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\mathbf{g}+\nu\nabla^{2}\mathbf{V}$$

N-S方程的近似处理

（2）粘性项的出现，使得NS方程的类型不确定，可以是扩散型方程，也可以是对流型方程，还可以是对流－扩散型方程，因此数学特性和物理现象都更为复杂。

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\mathbf{g}+\boxed{\nu\nabla^2\mathbf{V}}$$

N-S方程的近似处理

（3）压力与速度强耦合，而且在NS方程中，压力的贡献是压力梯度，速度的贡献是时间导数、一阶导数、二阶导数，因此压力场和速度场特性完全不同：

速度场是随时间对流扩散影响压力场；

压力场则不需时间就可以迅速影响速度场；

压力场和速度场的耦合匹配具有奇异性。

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\mathbf{g}+\nu\nabla^2\mathbf{V}$$

N-S方程的近似处理

把NS方程改写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

这里：

$$\mathbf{B} = \frac{\partial(\ )_i}{\partial x_i} \leftarrow \text{散度算子} \qquad \mathbf{B}^T = \frac{\partial(\ )}{\partial x_i} \leftarrow \text{梯度算子}$$

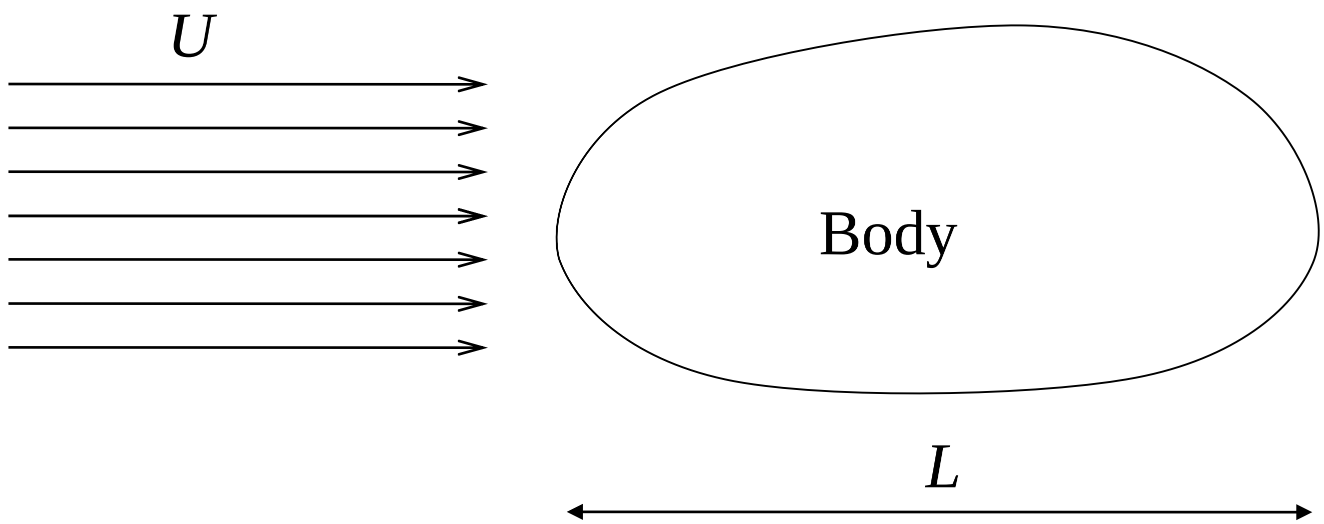
$$\mathbf{D} = \mathbf{M} + \mathbf{N} + \mathbf{L} \qquad \mathbf{M} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} \leftarrow \text{时间算子}$$

$$\mathbf{N} = u_j \frac{\partial(\ )_i}{\partial x_j} \leftarrow \text{对流算子} \qquad \mathbf{L} = -\nu \frac{\partial^2(\ )_i}{\partial x_j \partial x_j} \leftarrow \text{扩散算子}$$

N-S方程的近似处理

为了求解NS方程，可以根据NS方程中各项的贡献大小和重要程度，来取舍和保留最主要的项。可以通过方程的无因次化(dimensionless)来判断各项的重要性。

比如说，考虑一个非定常的物体绕流问题：



这个问题的特征尺度(Characteristic scales)量有：

长度 (L)；时间 (T)；速度 (U)；压力 (P)

上海交通大学 Shanghai Jiao Tong University

N-S方程的近似处理

利用上面的特征量，把有关的物理变量无因次化：

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{V}/U,\quad t^* = t/T,\quad \mathbf{x}^* = \mathbf{x}/L,\quad p^* = p/P,\quad \mathbf{g}^* = \mathbf{g}/g$$

这样NS方程可改写成无因次的形式：

$$\left(\frac{L}{UT}\right)\frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial t^*} + \mathbf{V}^* \cdot \nabla^* \mathbf{V}^*$$

$$= -\left(\frac{P}{\rho U^2}\right)\nabla^* p^* + \left(\frac{gL}{U^2}\right)\mathbf{g}^* + \left(\frac{\nu}{UL}\right)\nabla^{*2}\mathbf{V}^*$$

N-S方程的近似处理

这样无因次化后，NS方程各项的重要性就由各项前面的无因次系数大小来确定。

$$\frac{L}{UT} = \text{Strouhal 数 (St)} = \frac{\text{局部导数}}{\text{变位导数}}$$

$$\frac{P}{\rho U^2} = \text{Euler 数 (E)} = \frac{\text{压力}}{\text{惯性力}}$$

$$\frac{UL}{\nu} = \text{Reynolds 数 (Re)} = \frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}}$$

$$\frac{U^2}{gL} = \text{Froude 数 (Fr)} = \frac{\text{惯性力}}{\text{重力}}$$

N-S方程的近似处理

根据上面四个无因次量，可以对NS方程进行简化处理：

1) 大 Re 数

$$\frac{UL}{\nu} = \text{Reynolds 数 (Re)} = \frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}}$$

$\mathrm{Re} >> 1 \quad \Rightarrow$ 可以忽略粘性项,

NS 简化成 Euler 方程 $$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla \boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \boldsymbol{g}$$

N-S方程的近似处理

2) 小 Re 数

$$\frac{UL}{\nu} = \text{Reynolds 数 (Re)} = \frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}}$$

$$\text{Re} << 1 \quad \Rightarrow \quad \text{可以忽略非线性惯性项 (good news!)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{V}$$

这是线性方程，只要边界条件足够简单，就可以解析求解。

N-S方程的近似处理

3) 小 St 数

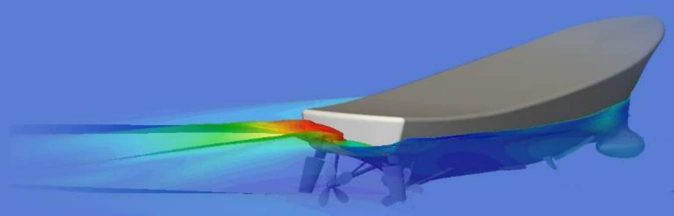
$$\frac{L}{UT} = \text{Strouhal 数 (St)} = \frac{\text{局部导数}}{\text{变位导数}}$$

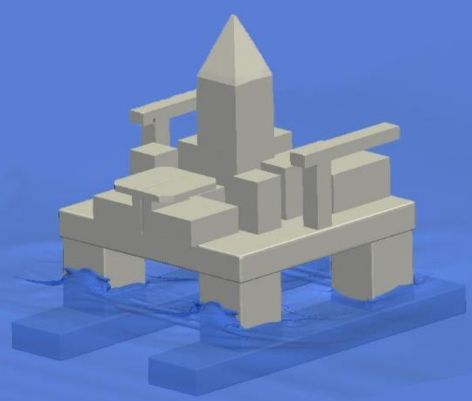
$$\text{St<<1} \quad \Rightarrow \quad \text{可以忽略非定常项} \quad \Rightarrow \quad \text{准定常流动}$$

$$\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} + \nu\nabla^2\mathbf{V}$$

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

http://dcwan.sjtu.edu.cn





*部分素材来源于网络