



上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

课程：船舶流体力学

主讲人：万德成

章节：第9章 边界层基本理论

内容：9.2 平板层流边界层的控制方程



平板层流边界层的控制方程

假定流动为**二维、不可压、定常流**，不考虑质量力，则粘性流动的N-S方程为：

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

利用边界层流动的特点，如流体的粘度大小、速度梯度大和边界层的厚度与物体的特征长度相比为一小量等，对N-S方程进行简化从而导出**层流边界层控制方程**。



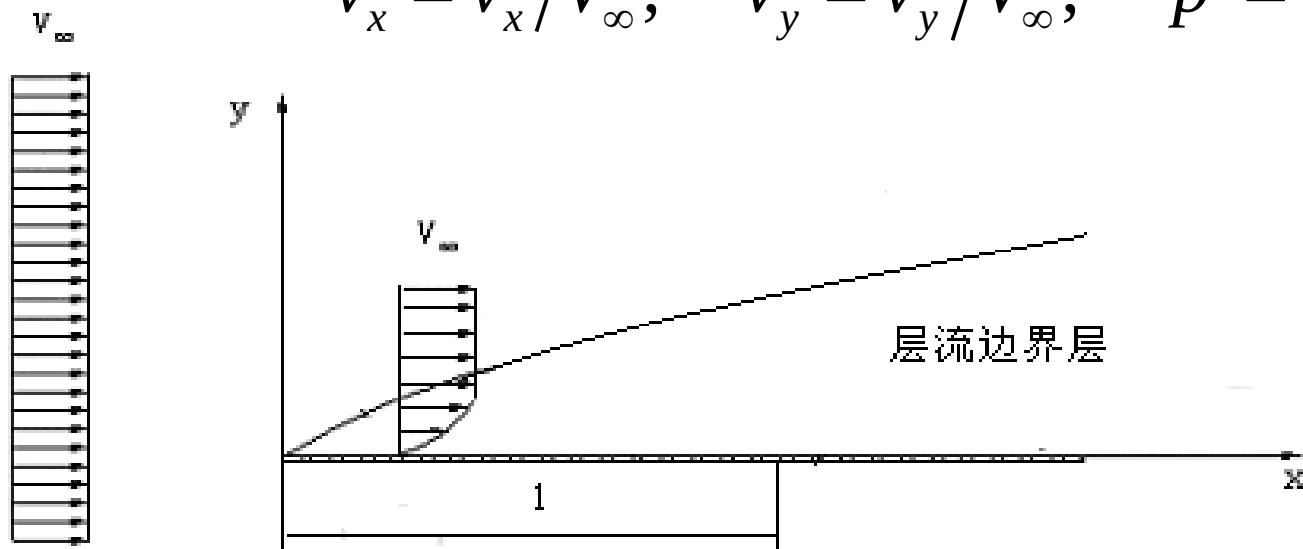
平板层流边界层的控制方程

无量纲化处理：

考虑如图所示的一个半无穷长绕流平板，假定无穷远来流的速度 V_∞ ，流体流过平板时在平板上方形成边界层，其厚度为 δ ，平板前缘至某点的距离为 ℓ 。取 V_∞ 和 ℓ 为特征量，可定义如下的无量纲量：

$$x' = x/\ell, \quad y' = y/\ell, \quad \delta' = \delta/\ell,$$

$$v'_x = v_x/V_\infty, \quad v'_y = v_y/V_\infty, \quad p' = p/(\rho/V_\infty^2)$$





平板层流边界层的控制方程

代入N-S方程得到：

$$\left. \begin{aligned}
 & v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}_l} \left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} \right) \\
 & v'_x \frac{\partial v'_y}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_y}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{\text{Re}_l} \left(\frac{\partial^2 v'_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2} \right) \\
 & \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} = 0
 \end{aligned} \right\}$$

$1.1 \quad \delta' \cdot \frac{1}{\delta'} \quad 1 \quad (\delta')^2 \quad 1 \quad \frac{1}{\delta'^2}$
 $1 \cdot \delta' \quad \delta' \cdot 1 \quad (\frac{1}{\delta'}) \quad (\delta')^2 \quad \delta' \quad \frac{1}{\delta'}$
 $1 \quad 1$

式中：

$$\text{Re}_l = \frac{V_\infty \ell}{\nu}$$

为雷诺数



平板层流边界层的控制方程



由边界层特征知道： δ 与 ℓ 相比较是很小的，即： $\delta \ll \ell$ 或 $\delta' = \delta / \ell \ll 1$ ，同时注意到， v_x 与 V_∞ 、 x 与 ℓ 、 y 与 δ 具有同一数量级，于是 v_x' 、 x' 和 p' 的量级均为 1，并可以得到：

$$\frac{\partial v_x'}{\partial x'} \sim 1, \quad \frac{\partial^2 v_x'}{\partial x'^2} \sim 1, \quad \frac{\partial v_x'}{\partial y'} \sim \frac{1}{\delta'}, \quad \frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2} \sim \frac{1}{\delta'^2}$$

为了估计其他各量的数量级，由连续性方程可得：

$$\frac{\partial v_y'}{\partial y'} = -\frac{\partial v_x'}{\partial x'} \sim 1$$



平板层流边界层的控制方程

因此 $v_y' \sim \delta'$ ，于是又得到：

$$\frac{\partial v_y'}{\partial x'} \sim \delta' \quad , \quad \frac{\partial^2 v_y'}{\partial x'^2} \sim \delta' \quad , \quad \frac{\partial v_y'}{\partial y'} \sim 1 \quad , \quad \frac{\partial^2 v_y'}{\partial y'^2} \sim \frac{1}{\delta'}$$

通过分析无因次方程组各项的数量级，方程组中第二式中各惯性项可以忽略掉，同时可以略去：

$$\frac{\partial^2 v_x'}{\partial x'^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 v_y'}{\partial x'^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 v_y'}{\partial y'^2}$$

于是在无因次方程组的粘性项中只剩第一式中的一项： $\frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2}$



平板层流边界层的控制方程

如果仅保留数量级为1的项，而将数量级比1小的各项全部略去，再恢复到有量纲的形式，便可以得到层流边界层的微分方程组为：

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$



平板层流边界层的控制方程

沿边界层外边界由伯努利方程可知: $p_b + \rho V_\infty^2 / 2 = \text{const}$

两边对 x 求导得: $\frac{dp_b}{dx} = -\rho V_\infty \frac{dV_\infty}{dx}$

这样, 层流边界层的控制方程又可写为:

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= V_\infty \frac{dV_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$



平板层流边界层的控制方程

对于顺流无限长平板，有：

$$\frac{dV_{\infty}}{dx} = 0$$

因此，顺流无限长平板层流边界层的控制方程为：

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$



平板层流边界层的控制方程

注意边界层条件:

在 $y = 0$ 处: $v_x = v_y = 0$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\nu} V_\infty \frac{dV_\infty}{dx}$$

在 $y = \delta$ 处:

$$v_x = V_\infty$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^{(n)} v_x}{\partial y^{(n)}} = 0$$



平板层流边界层的控制方程

层流边界层的控制方程：

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= V_\infty \frac{dV_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

顺流无限长平板层流边界层的控制方程：

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$



平板层流边界层的控制方程

层流边界层微分方程的近似求解（动量积分方程法）：

将二维层流边界层的控制方程分别从 0 到 δ 对 y 积分得到：

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\delta} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dy = \int_0^{\delta} \left(V_{\infty} \frac{dV_{\infty}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) dy \\ \int_0^{\delta} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dy = 0 \Rightarrow v_y = - \int_0^{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \end{array} \right.$$



把 v_y 代入，看下面的积分：

$$\begin{aligned}\int_0^{\delta} v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} dy &= - \int_0^{\delta} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \int_0^{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) dy \\ &= -V_{\infty} \int_0^{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy\end{aligned}$$

再看下面的积分：

$$\int_0^{\delta} \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy = \int_0^{\delta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dy = \int_0^{\delta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\tau)}{\partial y} dy = \left[\frac{\tau}{\rho} \right]_0^{\delta} = -\frac{\tau_w}{\rho}$$



平板层流边界层的控制方程

把上面积分式代入层流边界层的积分控制方程：

$$2 \int_0^{\delta} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy - V_{\infty} \int_0^{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = \int_0^{\delta} V_{\infty} \frac{dV_{\infty}}{dx} dy - \frac{\tau_w}{\rho}$$

整理并改写后：

$$\frac{\tau_w}{\rho} = - \int_0^{\delta} \frac{\partial v_x^2}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} \frac{\partial V_{\infty} v_x}{\partial x} dy - \int_0^{\delta} v_x \frac{\partial V_{\infty}}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} V_{\infty} \frac{dV_{\infty}}{dx} dy$$



$$\frac{\tau_w}{\rho} = \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ V_{\infty}^2 \left[\frac{v_x}{V_{\infty}} \left(1 - \frac{v_x}{V_{\infty}} \right) \right] \right\} dy + \frac{\partial V_{\infty}}{\partial x} V_{\infty} \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v_x}{V_{\infty}} \right) dy$$

动量损失厚度

排挤厚度



平板层流边界层的控制方程

把动量损失厚度和排挤厚度代入，可得：

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\partial(V_\infty^2 \theta)}{\partial x} + \frac{\partial V_\infty}{\partial x} V_\infty \delta^*$$

上式称为边界层Karman动量积分方程（Von Karman, 1921）。

对于顺流无限长平板，Karman动量积分方程为：

$$\frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2} = \frac{\partial \theta}{\partial x}$$



平板层流边界层的控制方程

引进速度剖面的形状因子：

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}$$

Karman动量积分方程可改写成：

$$\frac{d\theta}{dx} + (2 + H) \frac{\theta}{V_\infty} \frac{dV_\infty}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2}$$



平板层流边界层的控制方程

Karman动量积分方程：

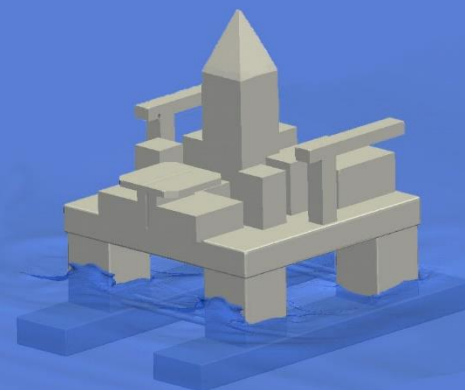
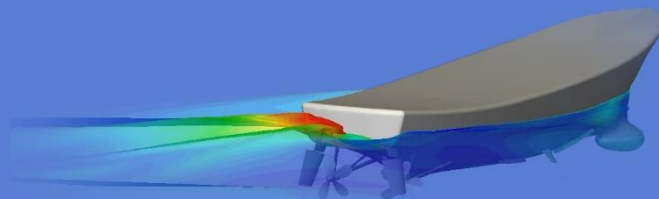
$$\frac{d\theta}{dx} + (2 + H) \frac{\theta}{V_{\infty}} \frac{dV_{\infty}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho V_{\infty}^2}$$

- **方程适用性：**层流、湍流边界层。
- **方程封闭性：**1个方程，3个未知数（ θ 、 δ^* 、 τ_w 或 θ 、 H 、 τ_w ），不封闭。但它们都和速度分布相关，即：

$$\tau_w = \mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right)_{y=0}, \quad \delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{v_x}{V_{\infty}} \right) dy, \quad \theta = \int_0^{\infty} \frac{v_x}{V_{\infty}} \left(1 - \frac{v_x}{V_{\infty}} \right) dy$$

CMHL COMPUTATIONAL MARINE HYDRODYNAMICS LAB
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

<http://dcwan.sjtu.edu.cn>



*部分素材来源于网络