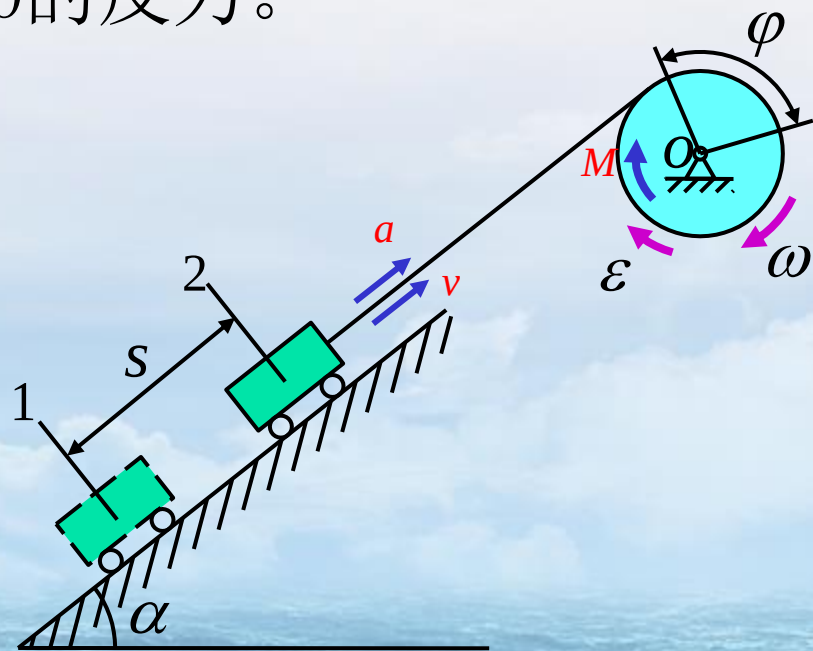


例题二



动能定理

一送料系统如图所示。已知鼓轮的重量为 P ，半径为 R ，绕水平固定轴 O 转动，鼓轮对转轴的转动惯量为 J_O ，小车与矿石的重量为 G 。斜面斜角为 α 。当卷扬机由静止开始启动，作用于鼓轮上一个不变的转矩 M 。设绳子不可伸长，绳重不计，各处摩擦均忽略不计。求：（1）小车的加速度；（2）绳子的张力及轴承 O 的反力。



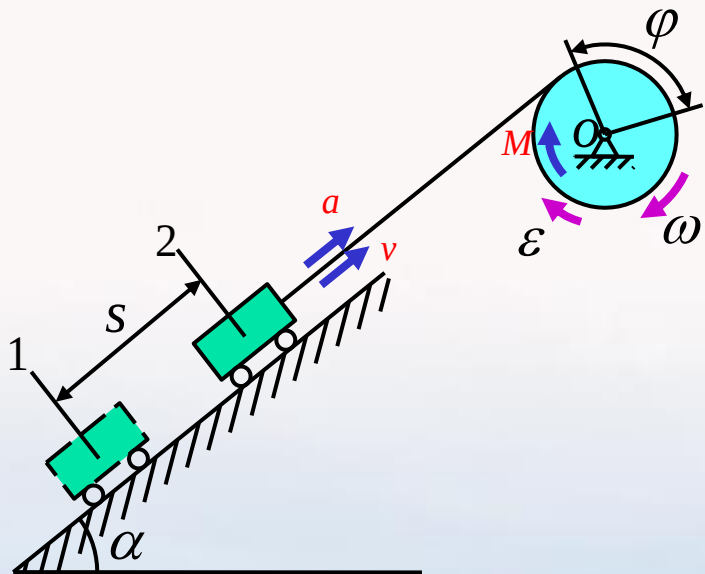
动能定理

解：以鼓轮、绳索、小车组成的系统
为研究对象。

(1) 运动分析，求动能

系统由静止开始运动，初始动能为 $T_1 = 0$

当小车上升距离 s 时，系统的动能为：



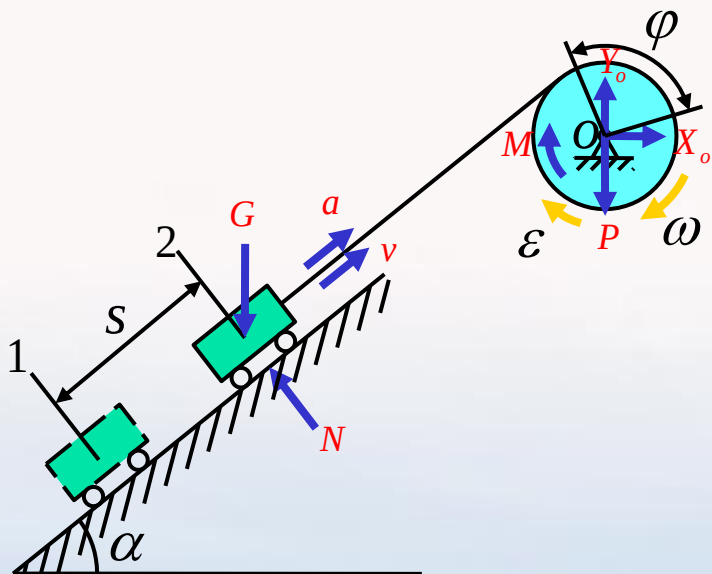
$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} J_o \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2 \\ &= \frac{1}{2} J_o \left(\frac{v}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{J_o}{R^2} + \frac{G}{g} \right) v^2 \end{aligned}$$



动能定理

(2) 受力分析，求力的功

系统受力，如图所示。



$$\begin{aligned}\sum W &= M\varphi - Gs \cdot \sin \alpha \\ &= \left(\frac{M}{R} - G \sin \alpha \right) \cdot s\end{aligned}$$

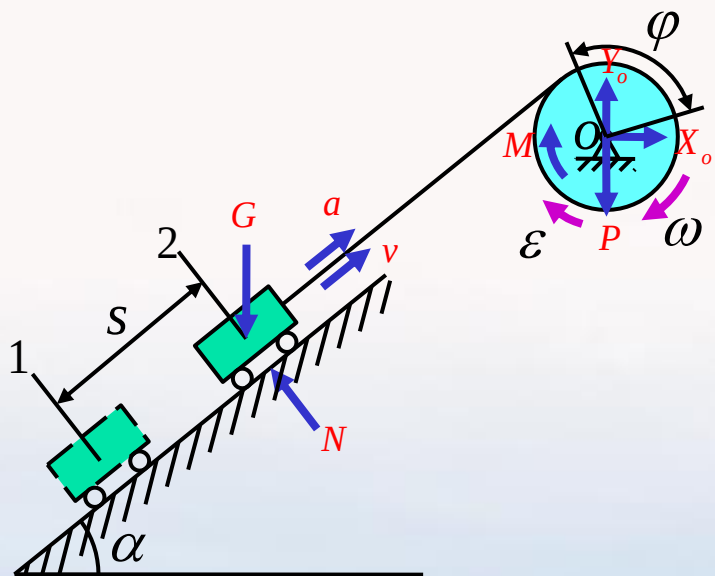
由动能定理：

$$T_2 - T_1 = \sum W$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{J_o}{R^2} + \frac{G}{g} \right) v^2 = \left(\frac{M}{R} - G \sin \alpha \right) \cdot s$$



动能定理



$$\frac{1}{2} \left(\frac{J_o}{R^2} + \frac{G}{g} \right) v^2 = \left(\frac{M}{R} - G \sin \alpha \right) \cdot s$$

将上式对 t 求导, 得

$$\frac{1}{2} \left(\frac{J_o}{R^2} + \frac{G}{g} \right) \cdot 2v \frac{dv}{dt} = \left(\frac{M}{R} - G \sin \alpha \right) \cdot \frac{ds}{dt}$$



$$v = \frac{ds}{dt}, a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{(M - GR \sin \alpha) R}{J_o g + GR^2} g$$



动能定理

(3)求绳子的张力及鼓轮的约束反力。

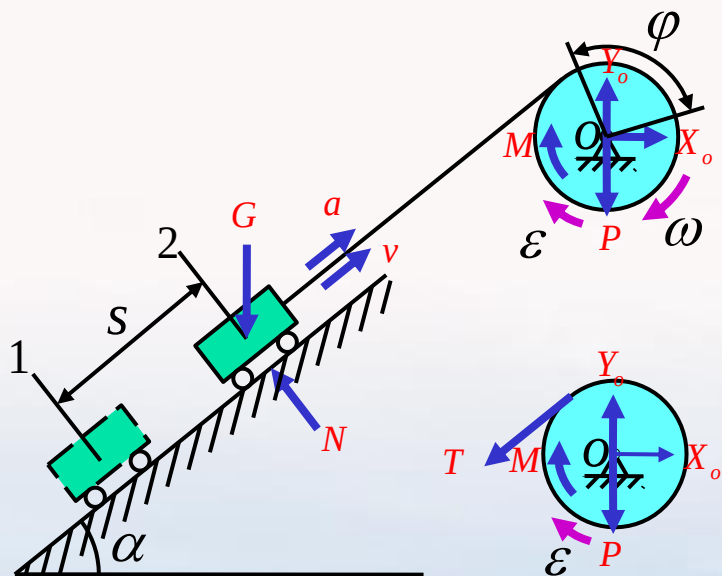
取鼓轮为研究对象，受力如图所示。

应用定轴转动微分方程：

$$J_o \varepsilon = M - TR$$

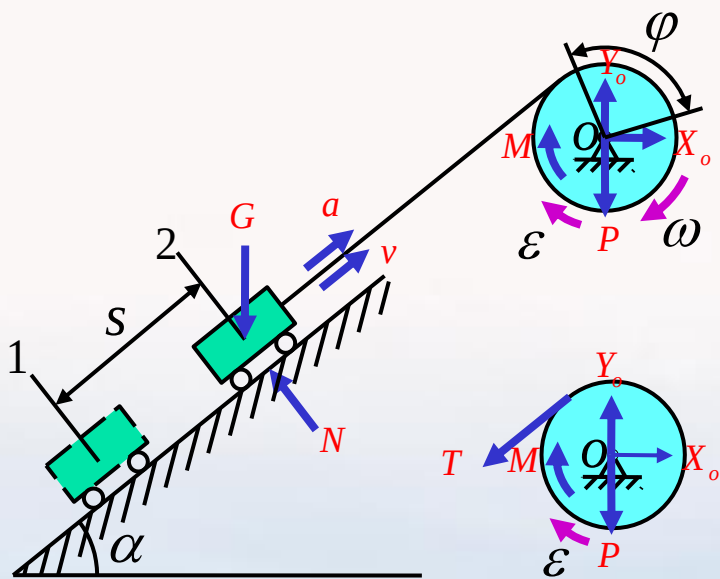
$$\varepsilon = \frac{a}{R}$$

$$T = \frac{M - J_o \varepsilon}{R} = \frac{(MR + J_o g \sin \alpha)}{(J_o g + GR^2)} \cdot G$$



动能定理

应用质心运动定理，求约束反力



$$Ma_{cx} = \sum X^{(e)}, \frac{P}{g} \cdot a_{cx} = X_o - T \cos \alpha$$

$$Ma_{cy} = \sum Y^{(e)}, \frac{P}{g} \cdot a_{cy} = Y_o - T \sin \alpha - P$$

由于 $Ma_{cx} = Ma_{cy} = 0$, 整理得

$$X_o = T \cos \alpha = \frac{MR + J_o g \sin \alpha}{J_o g + GR^2} \cos \alpha \cdot G$$

$$Y_o = P + T \sin \alpha = P + \frac{MR + J_o g \sin \alpha}{J_o g + GR^2} \sin \alpha \cdot G$$

