

平尔曼滤波



主讲人：李宁

卡尔曼滤波



卡尔曼滤波概述



离散系统的数学描述



卡尔曼滤波的准则



离散卡尔曼滤波方程

卡尔曼滤波概述

◆组合导航系统基本原理回顾

通过对两种或多种导航系统测量或输出信息进行综合处理（应用卡尔曼滤波等数据处理技术），获得更高的导航精度和可靠性，集各个子系统的优点于一身。

组合导航实质是状态估计问题！

卡尔曼滤波概述

◆ 状态估计：

对受到随机干扰和随机测量误差作用的物理系统，按照某种性能指标（准则）为最优的原则，从具有随机误差的测量数据中提取信息，估计出系统的某些参数状态变量。

卡尔曼滤波概述

◆状态估计分类：

- ◆对目标过去的运动状态进行平滑

- ◆对目标现在的运动状态进行滤波

- ◆对目标未来的运动状态进行预测

◆状态估计主要过程：系统建模，定义准则，求解

离散系统的数学描述

❖ 设离散化后的系统状态方程和量测方程分别为：

$$\begin{cases} X_k = \Phi_{k,k-1} X_{k-1} + \Gamma_{k-1} W_{k-1} \\ Z_k = H_k X_k + V_k \end{cases}$$

X_k 为k时刻的n维状态

k-

H_k

Γ_{k-1} 为系统噪声矩阵

V_k 为k时刻m维量测噪声

($n \times n$)

离散系统的数学描述

- ❖ 卡尔曼滤波要求 $\{W_k\}$ 和 $\{V_k\}$ 是互不相关的零均值的白噪声序列，有：

$$E\{W_k W_j^T\} = Q_k \delta_{kj}$$

$$E\{V_k V_j^T\} = R_k \delta_{kj}$$

Q_k 和 R_k 分别称为系统噪声和量测噪声的方差矩阵，在卡尔曼滤波中要求它们分别是已知值的非负定阵和正定阵；

δ_{kj} 是 δ 函数，即：
$$\delta_{kj} = \begin{cases} 0 & (k \neq j) \\ 1 & (k = j) \end{cases}$$

离散系统的数学描述

❖ 初始状态的一、二阶统计特性为：

$$E\{X_0\} = m_{x0}$$

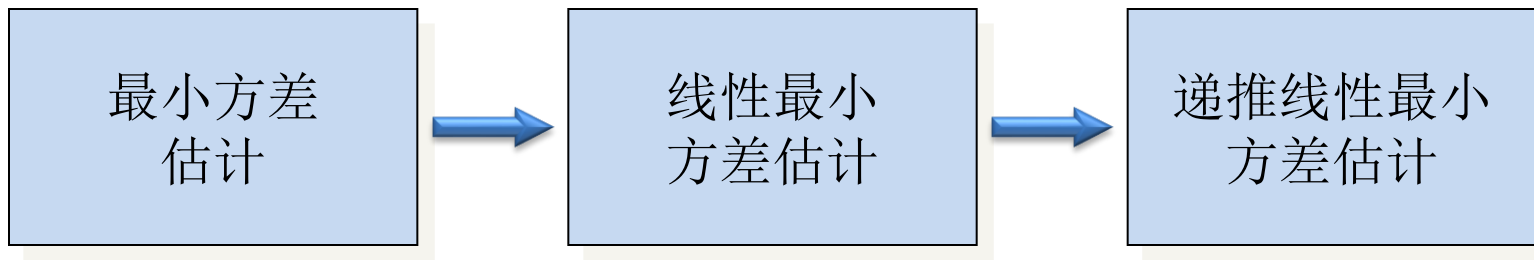
$$Var\{X_0\} = C_{x0}$$

要求 m_{x0} 和 C_{x0} 为已知量，

❖ 且要求 X_0 与 $\{W_k\}$ 和 $\{V_k\}$ 都不相关

卡尔曼滤波的准则

❖ 卡尔曼滤波是一种递推线性最小方差估计。



卡尔曼滤波的准则

❖ 什么是最小方差估计？线性最小方差估计？

若以状态估计的方差达到最小为指标

$$E[(X - \hat{X})^T (X - \hat{X})] = \min$$

则所得估计为最小方差估计！

若 $\hat{X}$ 又是 X 的线性估计，

则 $\hat{X}$ 为 X 的线性最小方差估计。

离散卡尔曼滤波方程

(1) 状态一步预测方程

$$\hat{\mathbf{X}}_{k/k-1}^{\Lambda} = \phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{X}}_{k-1}^{\Lambda}$$

$\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$  **K-1**时刻的卡尔曼滤波估值

$\hat{\mathbf{X}}_{k/k-1}$  利用 $\mathbf{X}_{k-1}$ 计算得到的一步预测

离散卡尔曼滤波方程

(2) 状态估计计算方程

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k/k-1} + K_k (Z_k - H_k \hat{X}_{k/k-1})$$

- ◆ 计算状态估计的方程。它是在一步预测 $\hat{X}_{k/k-1}$ 的基础上，根据量测值 Z_k 计算出来的

若把 $H_k \hat{X}_{k/k-1}$ 看作是量测 Z_k 的一步预测，则 $(Z_k - H_k \hat{X}_{k/k-1})$ 就是量测的一步预测误差，又称为新息。

离散卡尔曼滤波方程

(3) 滤波增益方程

K_k 选取的标准就是卡尔曼滤波的估计准则，也就是使得 $\hat{X}_k$ 均方误差阵最小：

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1}$$


一步预测均方误差阵

如果 R_k 大， K_k 就小
 R_k 小， K_k 就大

❖ 从上式可以看出，求 K_k 必须先求出 $P_{k/k-1}$

离散卡尔曼滤波方程

(4) 一步预测均方误差方程

$$P_{k/k-1} = \phi_{k,k-1} P_{k-1} \phi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k-1} Q_{k-1} \Gamma_{k-1}^T$$

定义 $\mathbf{x}_{k/k-1} = X_k - \hat{X}_{k/k-1}$ 为一步预测误差，则 $\mathbf{P}_{k/k-1}$ 为一步预测均方误差阵

$$P_{k/k-1} = E \left[\mathbf{x}_{k/k-1} \mathbf{x}_{k/k-1}^T \right]$$

其中 $\mathbf{P}_{k-1}$ 为上一时刻估计均方误差阵

离散卡尔曼滤波方程

(5) 估计均方误差方程

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k/k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T$$

$$\text{或 } P_k = (I - K_k H_k) P_{k/k-1}$$

定义 $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$ 为状态估计误差

则估计均方误差阵为 $P_k = E[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T]$

离散卡尔曼滤波方程

- ❖ 状态一步预测方程 $\longrightarrow \hat{X}_{k/k-1} = \phi_{k,k-1} \hat{X}_{k-1}$
- ❖ 状态估计计算方程 $\longrightarrow \hat{X}_k = \hat{X}_{k/k-1} + K_k (Z_k - H_k \hat{X}_{k/k-1})$
- ❖ 滤波增益方程 $\longrightarrow K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1}$
- ❖ 一步预测均方误差方程 $\longrightarrow P_{k/k-1} = \phi_{k,k-1} P_{k-1} \phi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k-1} Q_{k-1} \Gamma_{k-1}^T$
- ❖ 估计均方误差方程 $\longrightarrow P_k = (I - K_k H_k) P_{k/k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T$

离散卡尔曼滤波方程

