

本堂课内容:

弯曲要素表 (会查)

弯矩图、剪力图



§ 2-3 迭加法求梁的弯曲要素

一、单跨梁弯曲要素表

附录A为单跨梁的弯曲要素

表A-1：悬臂梁；

表A-2：两端自由支持梁；

表A-3：一端简支、一端刚固；

表A-4：两端刚固；

表A-5：一端弹固、一端简支；

表A-6：两端弹固；

说明：

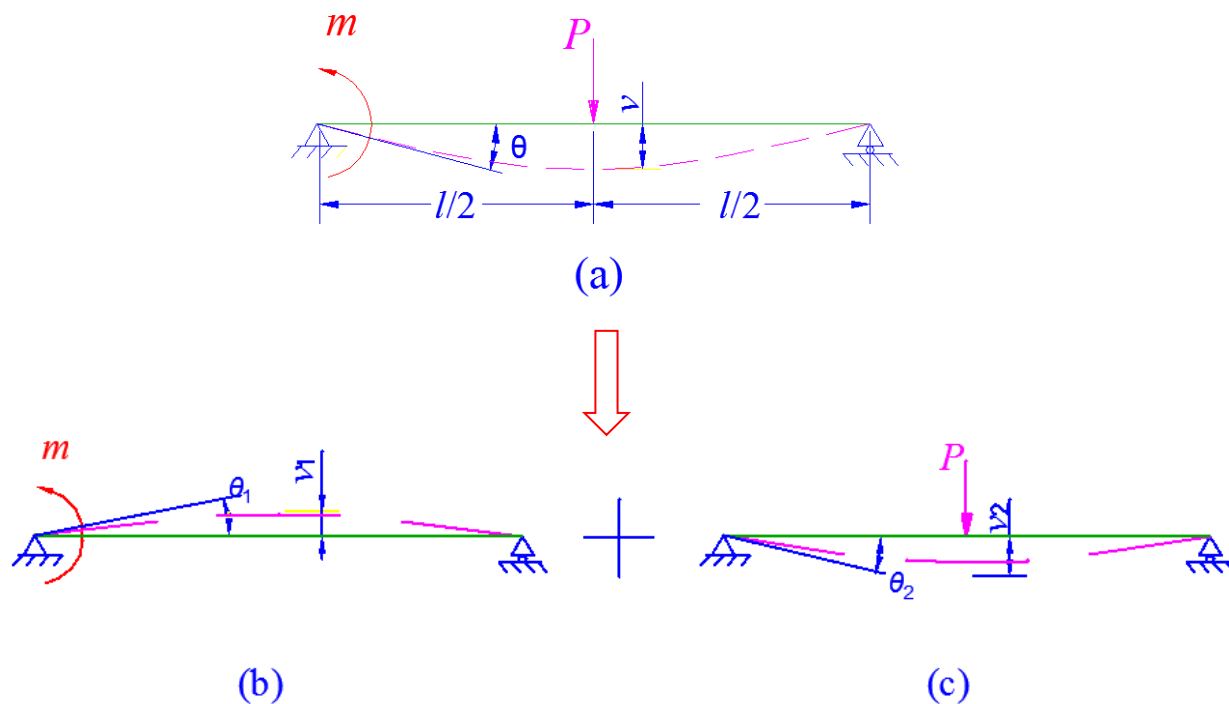
- ✓ 皆为单一荷重作用下的弯曲要素；
- ✓ 仅给出部分弯曲要素，两端简支梁的弯曲要素最全面最重要用的也最多；
- ✓ 要注意+、-号的判定；
- ✓ 注意每种单跨梁弯曲要素表前的说明。

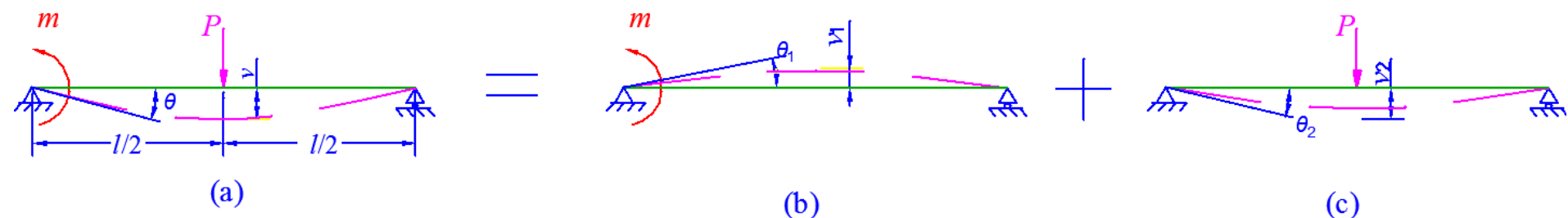


二、叠加原理

叠加原理： 梁上同时承受几种横向荷重作用下的弯曲要素，等于各横向荷重单独作用下的弯曲要素的代数和。

条件： 小变形，载荷和反力的作用线对原来位置没变，材料符合胡克定律





由附表A-2 P279:

N0.3

N0.1

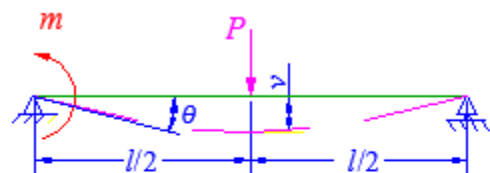
$$v_1\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{ml^2}{16EI}$$

$$v_2\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl^3}{48EI}$$

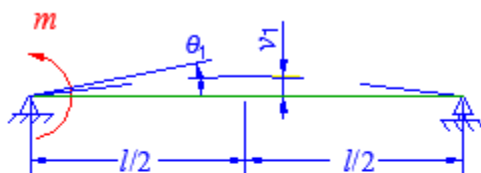
$$v\left(\frac{l}{2}\right) = v_1\left(\frac{l}{2}\right) + v_2\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{ml^2}{16EI} + \frac{Pl^3}{48EI} = 0.0083 \frac{Pl^3}{EI}$$

$$\theta(0) = \theta_1(0) + \theta_2(0) = -\frac{ml}{3EI} + \frac{Pl^2}{16EI} = -0.0042 \frac{Pl^2}{EI}$$

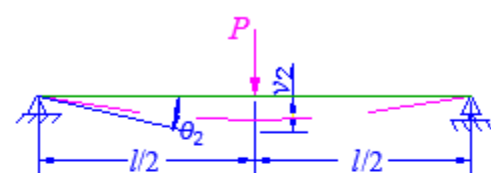




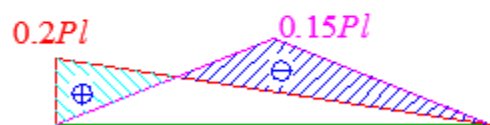
(a)



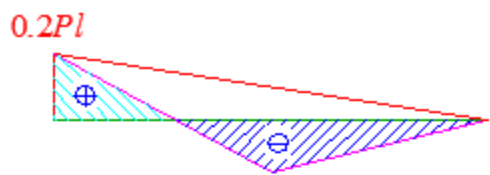
(b)



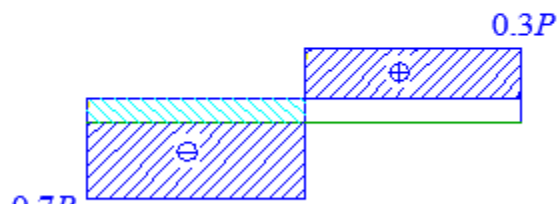
(c)



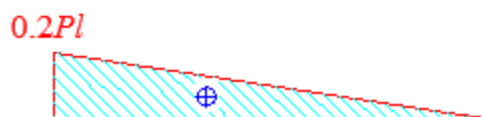
(d)



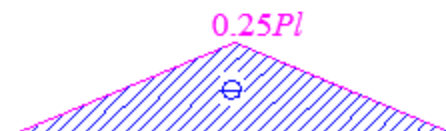
(e)



(f)



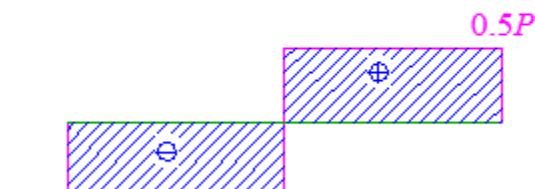
(g)



(i)



(h)



(j)



叠加时的注意点：

- 基线问题；
- 有效部分用阴影标出，值的正负标在阴影部分；
- 关键点的值要标上。

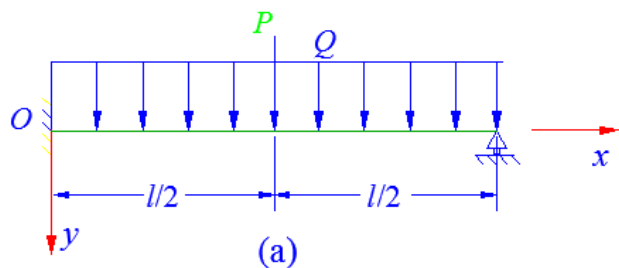
画弯矩图、剪力图原则：

- ❖ 先分开单独画，然后叠加；
- ❖ 同号相加，异号相抵；
- ❖ 正负号标在阴影部分。



例1：计算下图中一端刚性固定另一端自由支持梁的中点的挠度、右端转角，并画出梁的弯矩、剪力图。已知 $P = Q/3$ 。

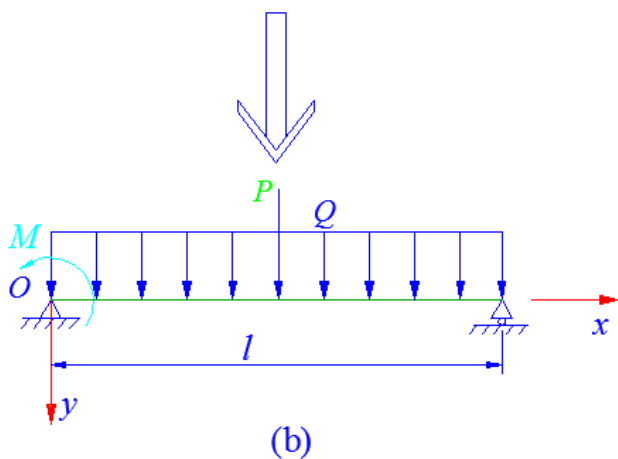
分析：(1) 求梁的中点的挠度 由附录A-3 P282 NO. 1、2



$$v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{7Pl^3}{768EI} + \frac{Ql^3}{192EI} = 0.00825 \frac{Ql^3}{EI}$$

(2) 求右端转角 查附表A-3梁右端的弯矩值为：

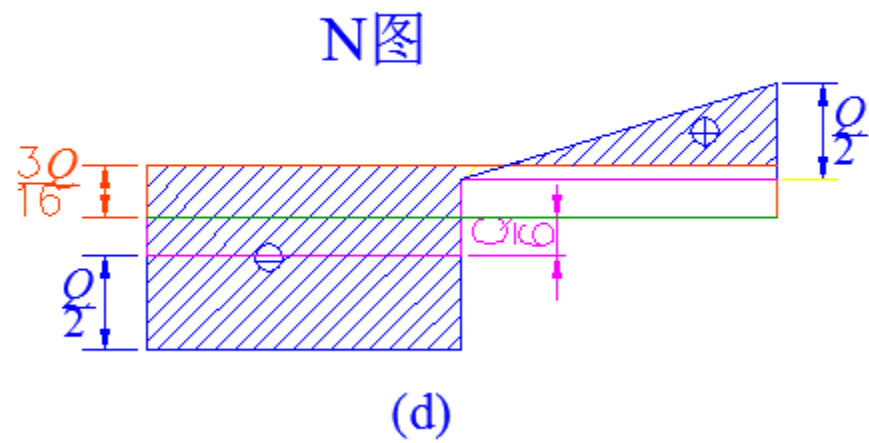
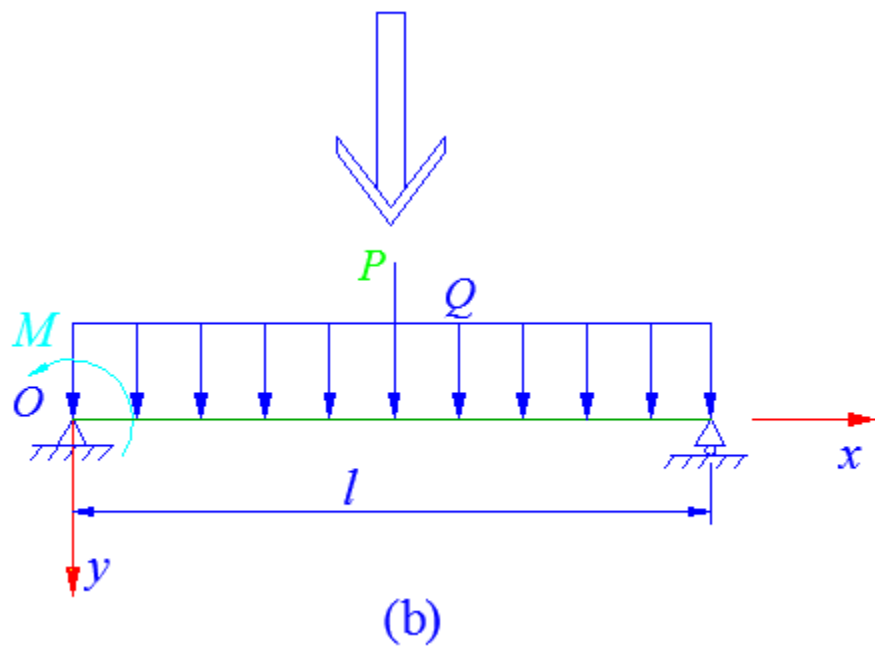
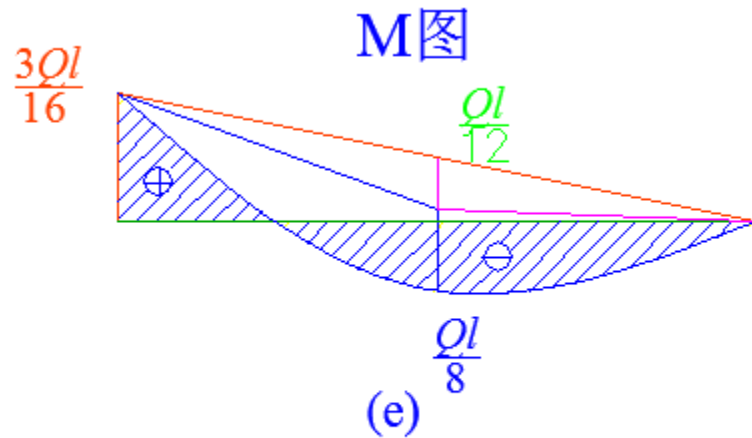
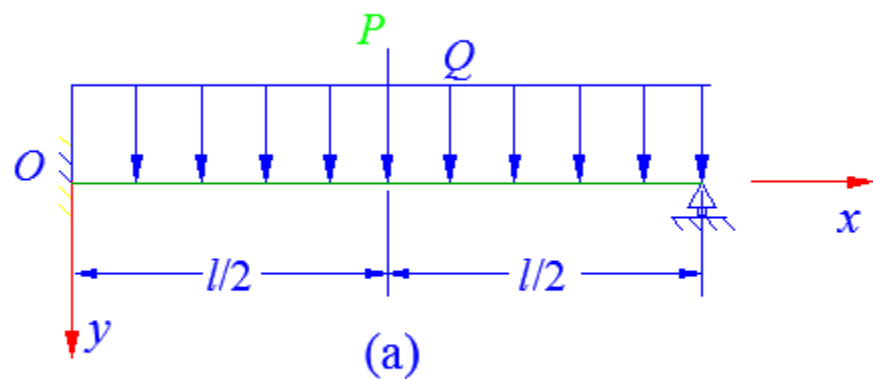
$$M = \frac{3Pl}{16} + \frac{Ql}{8} = \frac{3Ql}{16}$$



图b中梁在右端的转角可查附表A-2, 迭加可得：

$$\theta_l = \frac{Ml}{6EI} - \frac{Ql^2}{24EI} - \frac{Pl^2}{16EI} = -\frac{Ql^2}{32EI}$$

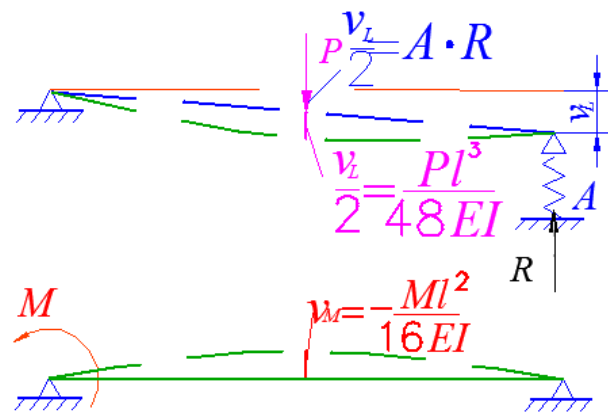
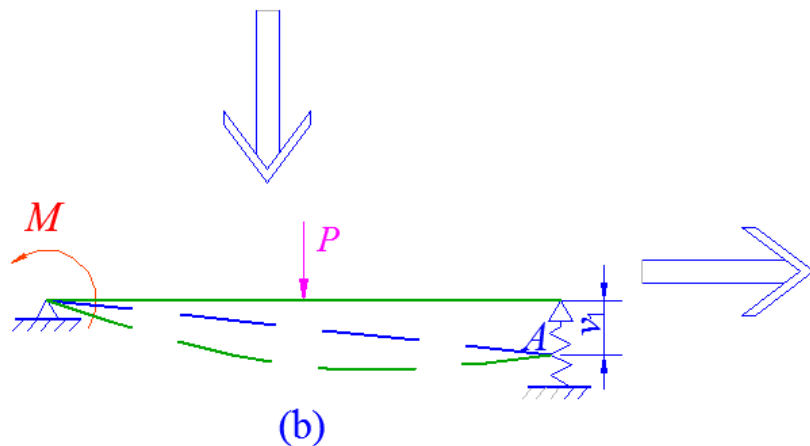
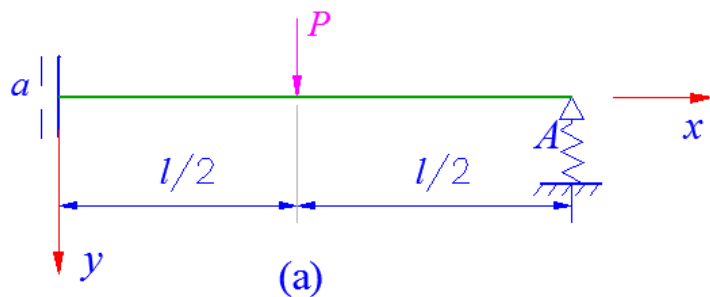




例2：计算一端弹性固定，一端弹性支座梁的中点挠度、端点转角并画弯矩、

剪力图。已知： $\alpha = \frac{l}{(3EI)}$, $A = \frac{l^3}{(48EI)}$ 。

分析：在附录中这类梁得弯曲要素表较为简单（附录表A-5），表中仅给了梁端的弯矩，故在计算中应将其转化成好查表的形式来求解。

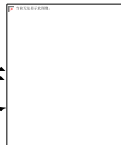


解：1、先求弹性固定端的弯矩，查表可的弹性固定端得弯矩：

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha EI}{l} = \frac{1}{3}, \bar{A} = \frac{AEI}{l^3} = \frac{1}{48}$$

$$k_A = \bar{\alpha} + \bar{A} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{48} + \frac{1}{3} = \frac{33}{48}$$



2、求中点的挠度 。  由三部分组成：M引起、P引起、弹性支座

M引起的梁中点的挠度（表A-2, NO. 3）：



P引起的挠度（表A-2, NO. 1）：



弹性支座引起的挠度：



弹性支座引起梁中点的挠度：

弹性支座处的挠度：

$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow R = \frac{P}{2} - \frac{M}{l} = \frac{P}{2} - \frac{7P}{66} = \frac{13P}{33}$$

$$v(l) = \Delta R = \frac{l^3}{48EI} \cdot \frac{13P}{33} = \frac{13}{1584} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$

弹性支座引起梁中点的挠度：

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{v_l}{2} = \frac{29}{3168} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$



因此梁中点的挠度为：

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{Ml^2}{16EI} + \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{13}{3168} \cdot \frac{Pl^3}{EI} = \frac{29}{1584} \frac{Pl^2}{EI}$$

3、梁左端的转角为： $\theta_0 = \alpha M = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{7}{66} Pl = \frac{7}{198} \frac{Pl^2}{EI}$

梁的右端的转角为外力P、端点弯矩M、 v_l 引起的三部分的和：

外力P引起梁的右端的转角(表A-2,N0.1): $\theta_P(l) = -\frac{Pl^2}{16EI}$

端点弯矩M引起的梁右端的转角: $\theta_M(l) = \frac{Ml}{6EI}$

V_l 引起的梁右端转角: $\theta(l) = \frac{v_l}{l} = \frac{13}{1584} \cdot \frac{Pl^2}{EI}$



因此梁的右端的转角为：

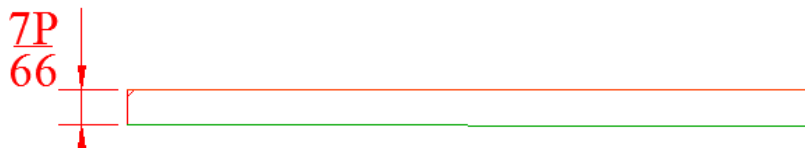
$$\theta(l) = -\frac{Pl^2}{16EI} + \frac{Ml}{6EI} + \frac{13}{1584} \cdot \frac{Pl^2}{EI} = -\frac{29}{792} \frac{Pl^2}{EI}$$

4、梁的弯矩、剪力图



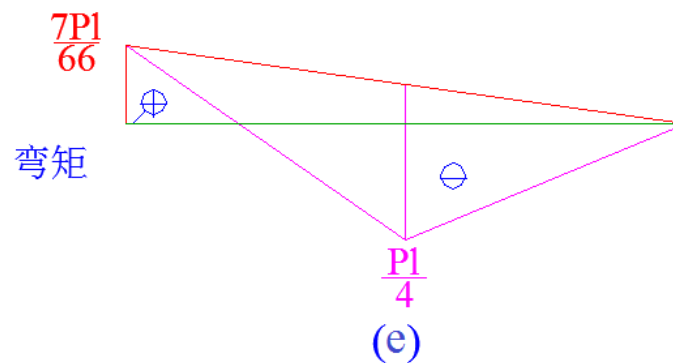
M引起的弯矩

(c)

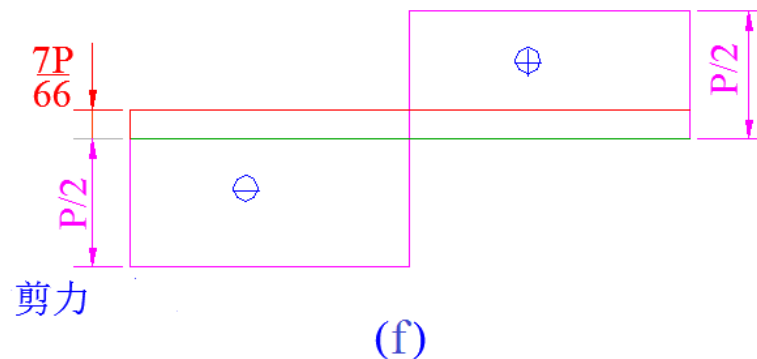


M引起的剪力

(d)



(e)



(f)



本堂课小结：

➤ 叠加法求梁的弯曲要素

➤ 画弯矩图和剪力图的步骤：

先分开单独按单跨梁画，然后叠加；

同号相加，异号相抵；

标正负号；

■ 复习：本堂课内容

■ 预习：P23-32

■ 作业：P42 2.2, 2.5

