第五章 位移法

- 本章主要内容及重点、难点
  - 符号法则、位移法原理
  - 弯矩分配(自学)
  - 求解复杂刚架及弯矩图

总结：

- 若i点处有S根杆汇交，具有外加集中力矩m_i（顺时针），则平衡方程：$\sum_{j=1}^{S}(\overline{M}_{ij}+M'_{ij})-m_i=0$

- 若i点处为弹性固定端，则：$\overline{M}_{ij}+M'_{ij}+\frac{\theta_i}{\alpha_i}=0$

若i点处为弹性支座，则：$\sum\overline{N}_{ij}+N'_{ij}+\frac{v_i}{A_i}=0$

§5-2 位移法在杆系中的应用

- 不可动节点复杂刚架和连续梁
- 阶梯形变断面梁；
- 可动节点刚架；
- 简单板架(复杂板架用力法)

一、位移法求解不可动节点复杂刚架

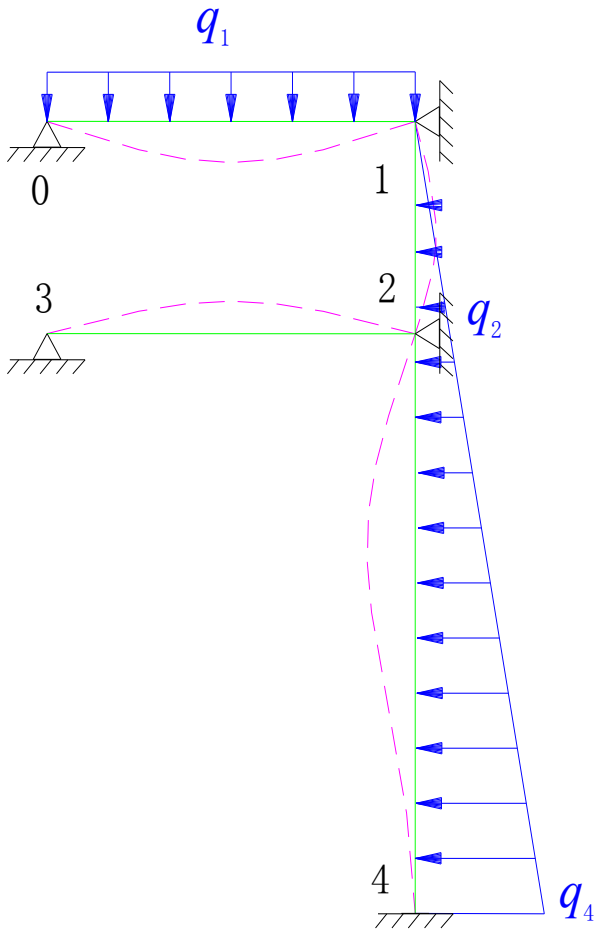
- 例: (P94 例2)
- 已知: $l_{01}=2.2l_0, I_{01}=6.8I_0,$

$$l_{12}=l_0, I_{12}=I_0,$$

$$l_{23}=2.2l_0, I_{23}=1.29I_0$$

$$l_{24}=2.7l_0, I_{24}=3.8I_0,$$

$$q_1=2q_0, q_2=q_0, q_4=3.7q_0$$



分析：

1）、确定未知转角 $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$

2）、约束结构，计算外载荷引起的固端弯矩（查附表A-4）

$$\overline{M}_{01} = -\overline{M}_{10} = -\frac{1}{12} q_1 l_{01}^2 = -0.807 q_0 l_{01}^2$$

$$\overline{M}_{12} = -\frac{1}{30} q_2 l_{12}^2 = -0.0333 q_0 l_{01}^2$$

$$\overline{M}_{21} = -\frac{1}{20} q_2 l_{12}^2 = -0.05 q_0 l_{01}^2$$

$$\overline{M}_{24} = -\frac{1}{12} q_2 l_{24}^2 - \frac{1}{30}(q_4 - q_2) l_{24}^2 = -1.26 q_0 l_0^2$$

$$\overline{M}_{42} = \frac{1}{12} q_2 l_{24}^2 - \frac{1}{20}(q_4 - q_2) l_{24}^2 = 1.592 q_0 l_0^2$$

3）、杆端总弯矩：

$$M_{ij}=\overline{M}_{ij}+M'_{ij}=\overline{M}_{ij}+\frac{4EI_{ij}}{l_{ij}}\theta_i+\frac{2EI_{ij}}{l_{ij}}\theta_j$$

4）、对发生转角的各节点列弯矩（力）平衡方程：

0节点：$M_{01}=0$

1节点：$M_{10}+M_{12}=0$

2节点：$M_{21}+M_{23}+M_{24}=0$

3节点：$M_{32}=0$

整理得：

$$\begin{cases} 12.4\theta_0 + 6.2\theta_1 = 0.807\dfrac{q_0 l_0^3}{EI_0} \\ 6.2\theta_0 + 16.4\theta_1 + 2\theta_2 = -0.774\dfrac{q_0 l_0^3}{EI_0} \\ 2\theta_1 + 11.98\theta_2 + 1.172\theta_3 = 1.212\dfrac{q_0 l_0^3}{EI_0} \\ 1.172\theta_2 + 2.34\theta_3 = 0 \end{cases}$$

解之得：

$$\begin{cases} \theta_0 = 0.1187\dfrac{q_0 l_0^3}{EI_0}, & \theta_1 = -0.1074\dfrac{q_0 l_0^3}{EI_0} \\ \theta_2 = 0.1261\dfrac{q_0 l_0^3}{EI_0}, & \theta_3 = -0.0631\dfrac{q_0 l_0^3}{EI_0} \end{cases}$$

5）、求杆端总弯矩：

$$M_{ij} = \overline{M}_{ij} + M'_{ij} = \overline{M}_{ij} + \frac{4EI_{ij}}{l_{ij}}\theta_i + \frac{2EI_{ij}}{l_{ij}}\theta_j$$

$$M_{01}=\overline{M}_{01}+\frac{4EI_{01}}{l_{01}}\theta_0+\frac{2EI_{01}}{l_{01}}\theta_1$$

$$=(0.807+4\times3.1\times0.1187-2\times3.1\times0.1074)q_0l_0^2=0$$

$M_{10}=42.38\quad \text{kN}\cdot\text{m}$

$M_{12}=-41.98\quad \text{kN}\cdot\text{m}$

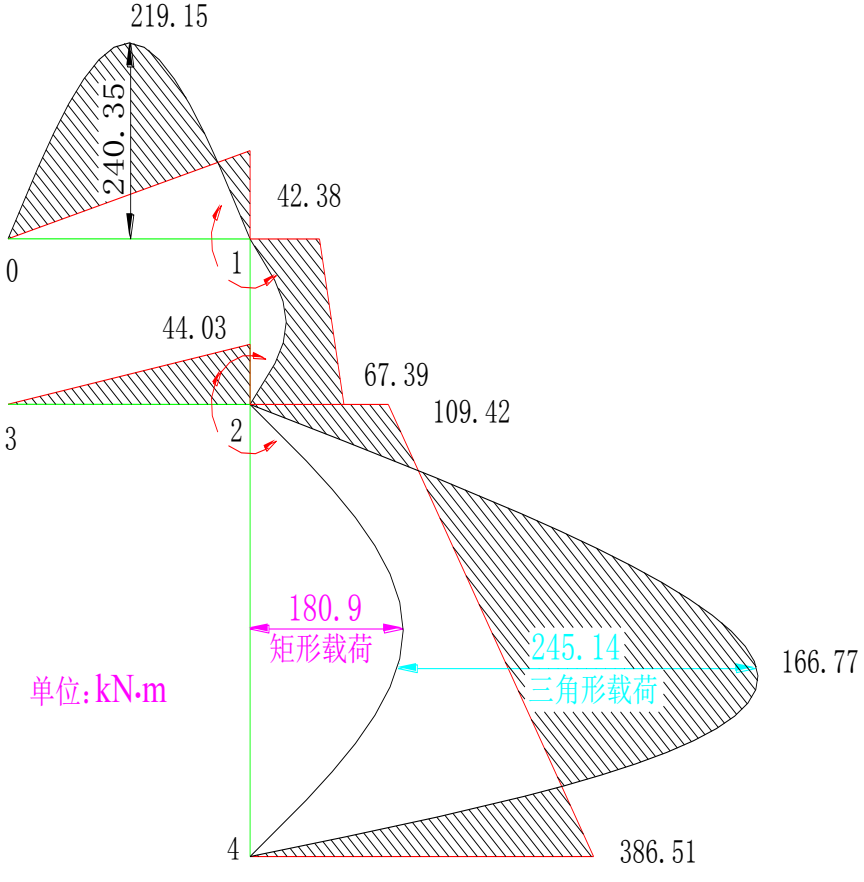
$M_{21}=67.39\quad \text{kN}\cdot\text{m}$

$M_{23}=44.03\quad \text{kN}\cdot\text{m}$

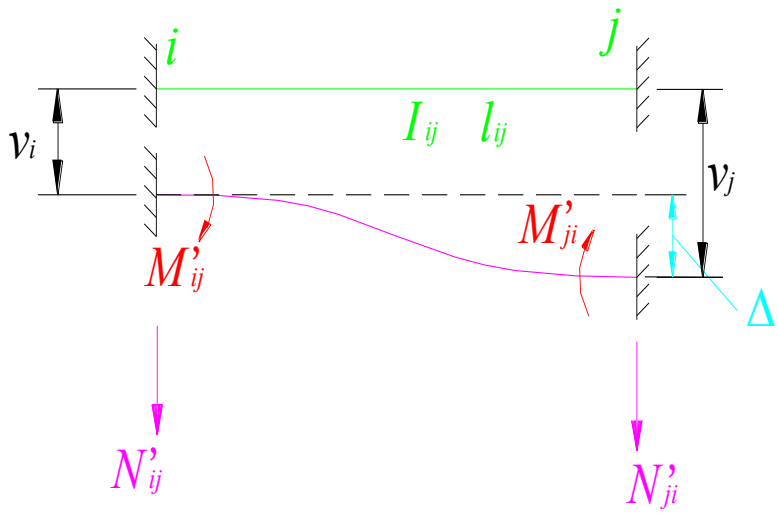
$M_{24}=-109.42\quad \text{kN}\cdot\text{m}$

$M_{32}=0$

$M_{42}=386.51\quad \text{kN}\cdot\text{m}$



二、可动节点刚架



$$M'_{ij}=M'_{ji}=-\frac{6EI_{ij}\Delta}{l_{ij}^{2}}$$

$$N'_{ij}=-\frac{12EI_{ij}\Delta}{l_{ij}^{3}},N'_{ji}=\frac{12EI_{ij}\Delta}{l_{ij}^{3}}$$

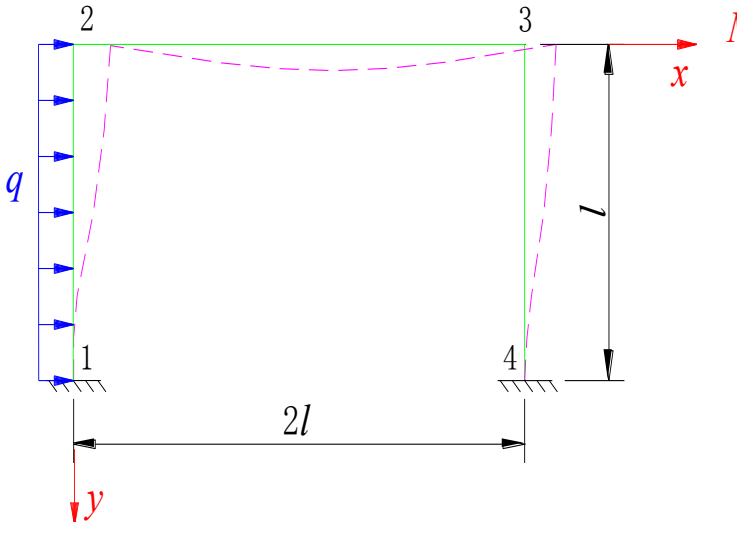
$$\begin{cases}M'_{ij}=\dfrac{6EI_{ij}}{l_{ij}^{2}}v_i-\dfrac{6EI_{ij}}{l_{ij}^{2}}v_j\\ M'_{ji}=\dfrac{6EI_{ij}}{l_{ij}^{2}}v_i-\dfrac{6EI_{ij}}{l_{ij}^{2}}v_j\end{cases}\qquad \begin{cases}N'_{ij}=\dfrac{12EI_{ij}}{l_{ij}^{3}}v_i-\dfrac{12EI_{ij}}{l_{ij}^{3}}v_j\\ N'_{ji}=-\dfrac{12EI_{ij}}{l_{ij}^{3}}v_i+\dfrac{12EI_{ij}}{l_{ij}^{3}}v_j\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} M'_{ij} &= \frac{4EI_{ij}}{l_{ij}}\theta_i + \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^{\,2}}v_i + \frac{2EI_{ij}}{l_{ij}}\theta_j - \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^{\,2}}v_j \\ M'_{ji} &= \frac{2EI_{ij}}{l_{ij}}\theta_i + \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^{\,2}}v_i + \frac{4EI_{ij}}{l_{ij}}\theta_j - \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^{\,2}}v_j \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} N'_{ij} &= \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^{\,2}}\theta_i + \frac{12EI_{ij}}{l_{ij}^{\,3}}v_i + \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^{\,2}}\theta_j - \frac{12EI_{ij}}{l_{ij}^{\,3}}v_j \\ N'_{ji} &= -\frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^{\,2}}\theta_i - \frac{12EI_{ij}}{l_{ij}^{\,3}}v_i - \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^{\,2}}\theta_j + \frac{12EI_{ij}}{l_{ij}^{\,3}}v_j \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} M'_{ij} \\ N'_{ij} \\ M'_{ji} \\ N'_{ji} \end{Bmatrix} = \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} \begin{bmatrix} 4 & 6/l_{ij} & 2 & -6/l_{ij} \\ 6/l_{ij} & 12/l_{ij}^2 & 6/l_{ij} & -12/l_{ij} \\ 2 & 6/l_{ij} & 4 & -6/l_{ij} \\ -6/l_{ij} & -12/l_{ij} & -6/l_{ij} & 12/l_{ij}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ v_i \\ \theta_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

例2（P100 例2）计算图示可动节点刚架。



分析：

1）、确定未知节点位移 θ_2,θ_3,v

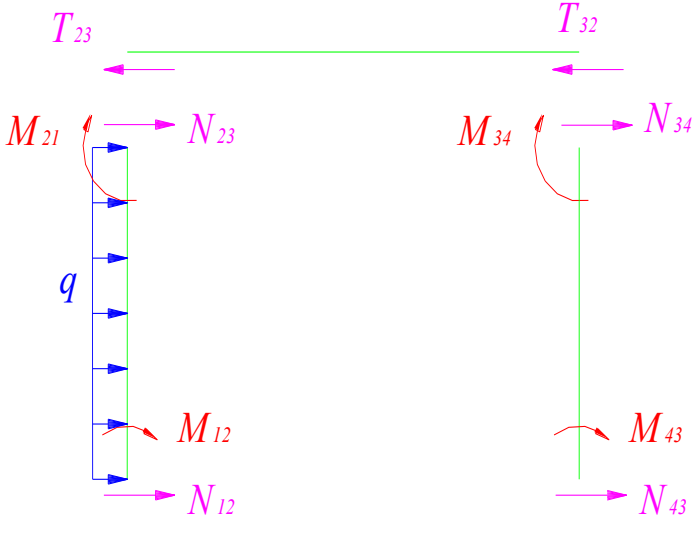
2）、查表求外载荷引起的固端力

$$\overline{M}_{12}=-\overline{M}_{21}=-\frac{ql^2}{12}$$

$$\overline{N}_{12}=\overline{N}_{21}=-\frac{ql}{2}$$

3）、杆端位移引起的杆端力

$$M'_{21}=\frac{4EI}{l}\theta_2-\frac{6EI}{l^2}v$$



$$M'_{23}=\frac{4EI}{2l}\theta_2+\frac{2EI}{2l}\theta_3$$

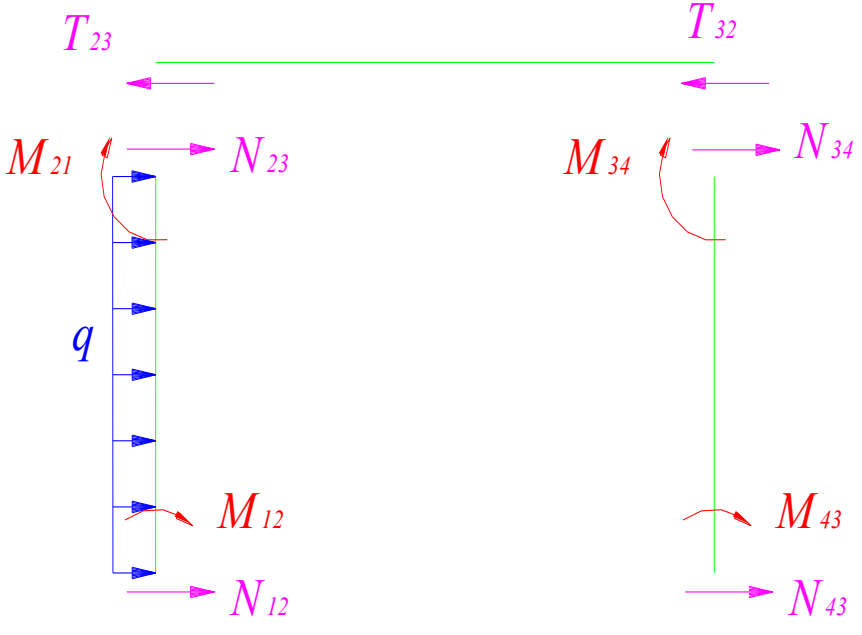
$$M'_{32}=\frac{2EI}{2l}\theta_2+\frac{4EI}{2l}\theta_3$$

$$M'_{34}=\frac{4EI}{l}\theta_3-\frac{6EI}{l^2}v$$

$$N'_{21}=-\frac{6EI}{l^2}\theta_2+\frac{12EI}{l^3}v$$

$$N'_{34}=-\frac{6EI}{l^2}\theta_3+\frac{12EI}{l^3}v$$

4）、列节点平衡方程



2节点： $M_{21}+M_{23}=0$

3节点： $M_{32}+M_{34}=0$

补充： $N_{21}+N_{34}=0$

代入整理得：
$$\begin{cases} 6\theta_2+\theta_3-6\dfrac{v}{l}=-\dfrac{1}{12}\dfrac{ql^3}{EI} \\ \theta_2+6\theta_3-6\dfrac{v}{l}=0 \\ -6\theta_2-6\theta_3+24\dfrac{v}{l}=\dfrac{1}{2}\dfrac{ql^3}{EI} \end{cases}$$

解之得：$\theta_2=\dfrac{1}{80}\dfrac{ql^3}{EI}$　　$\theta_3=\dfrac{7}{240}\dfrac{ql^3}{EI}$　　$v=\dfrac{1}{32}\dfrac{ql^4}{EI}$

5）、总杆端力：

$$M_{12}=-\frac{ql^2}{12}+\frac{2EI}{l}\theta_2-\frac{6EI}{l^2}v=-0.246ql^2=-M_{23}$$

$$M_{21}=\frac{ql^2}{12}+\frac{4EI}{l}\theta_2-\frac{6EI}{l^2}v=-0.054ql^2$$

$$M_{32}=\frac{EI}{l}\theta_2+\frac{2EI}{l}\theta_3=0.071ql^2=-M_{34}$$

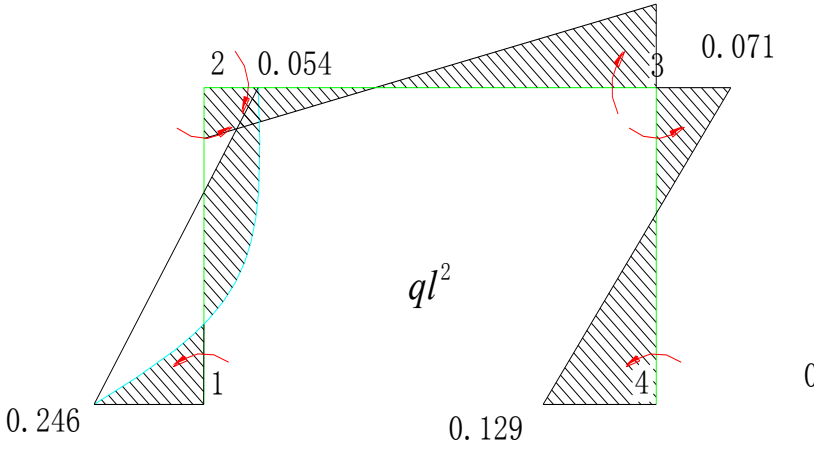
$$M_{43}=\frac{2EI}{l}\theta_3-\frac{6EI}{l^2}v=-0.129ql^2$$

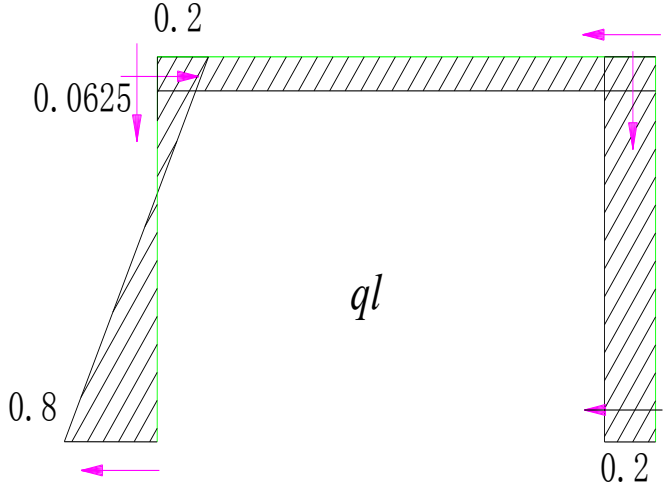
$$N_{12}=-\frac{ql}{2}+\frac{6EI}{l^2}\theta_2-\frac{12EI}{l^3}v=-0.8ql$$

$$N_{21}=-\frac{ql}{2}-\frac{6EI}{l^2}\theta_2+\frac{12EI}{l^3}v=-0.2ql$$

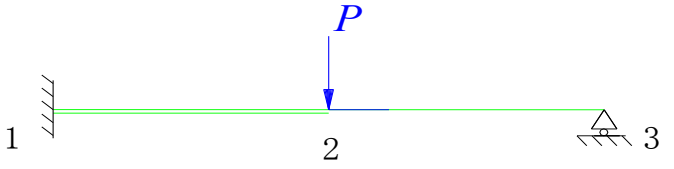
$$N_{23}=\frac{6EI}{(2l)^2}(\theta_2+\theta_3)=0.0625ql=-N_{32}$$

$$N_{34}=-\frac{6EI}{l^2}\theta_3+\frac{12EI}{l^3}v=0.2ql=-N_{43}$$

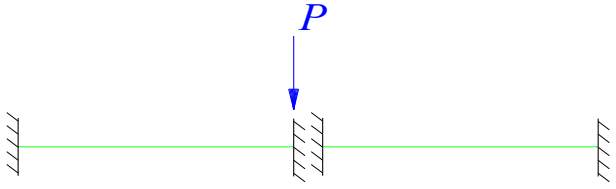




例2、计算阶梯变断面梁（P98）



- 未知节点位移 θ_2, v_2, θ_3

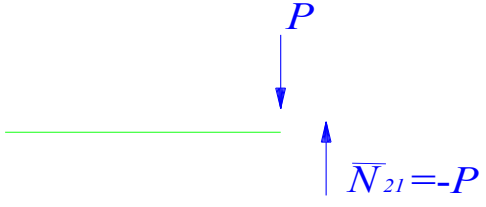


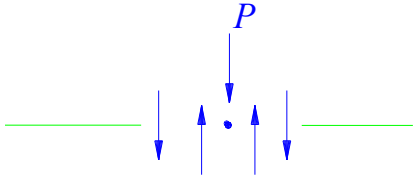
- 力平衡方程

$$M_{12} + M_{23} = 0$$

$$M_{32} = 0$$

$$N_{12} + N_{23} = 0$$





例3、计算简单板架（P102 自学）

本章小结：

- 位移法的符号法则；
- 位移法原理（基本结构、未知数、方程）；
- 弯矩图剪力图的画法；
- 位移法可求哪些杆件。

复习：本章内容

作业：5.5 5.8

习题课题目