船舶结构力学　第六章 能量法　（三）

主讲教师：罗广恩

职称：副教授

船舶与海洋工程学院

第六章 能 量 法

重点难点内容：

- 应变能的计算；
- 位能驻值原理及其近似解法（李兹法）的应用（弯曲问题、稳定性问题）；
- 余位能驻值原理，应力能原理（卡氏定理、最小功原理）

复习：

- ❖ 虚位移原理的应用（位能驻值原理）
- ❖ 近似解法——李兹法

本堂课内容：

虚力原理的应用

- ❖ 余位能驻值原理
- ❖ 应力能原理(卡氏定理、最小功原理)

§6-6 虚力原理的应用

虚力原理

——设结构在外力作用下处于平衡状态，如果给外力一个不破坏静力平衡条件及静力边界条件的虚变化，并且由此虚力产生的变形是协调的，则外力的虚余功必等于结构的虚余能。

$$\left.\begin{array}{ll} \delta W^{*}=\Delta_1\delta P_1+\Delta_2\delta P_2+\cdots & \delta P_i \\ \delta V^{*}=\int_{\Omega}\{\varepsilon\}^{T}\{\delta\sigma\}d\Omega & i \end{array}\right\}$$

$$\longrightarrow \quad \delta W^{*}=\delta V^{*}$$

1、余位能驻值原理

定义：总余位能： $\Pi^* = V^* - \sum_i R_i \Delta_i$

余能

反力余位能

若R_i处有变化 δR_i， 虚余功 $\delta W^* = \sum_i \delta R_i \Delta_i = \delta \sum_i R_i \Delta_i$

则虚力原理： $\delta W^* = \delta V^* \quad \Rightarrow \delta V^* = \delta \sum_i R_i \Delta_i$

$$\boxed{\delta(V^* - \sum_i R_i \Delta_i) = 0 \Rightarrow \delta \Pi^* = 0}$$

——余位能驻值原理

说明：

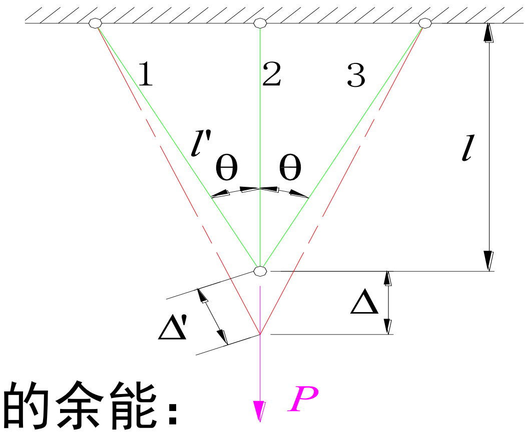
（1）稳定平衡时，Π^* 为极小值，又称最小余位能原理

（2）对不能发生位移的之座，$\Pi^* = V^*, \delta\Pi^* = \delta V^* = 0$

（3）代表了变形协调条件，相当于“力法”。

例1：用余位能驻值原理解图6-8中的静不定桁架。

分析：



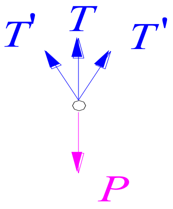


图6-8

1）、计算各杆的余能：

$$V_1^* = V_3^* = \frac{T'^2 l'}{2EA} = \frac{T'^2 l}{2EA\cos\theta} \qquad V_2^* = \frac{T^2 l}{2EA}$$

节点o：$\sum F_y = 0$

$$\Rightarrow P - 2T'\cos\theta - T = 0 \Rightarrow T' = (P-T)/2\cos\theta$$

2） 总余位能：

结构无发生位移的支座，则：

$$\Pi^* = V^* = \frac{T^2 l}{2EA} + \frac{(P-T)^2 l}{4EA\cos^3\theta}$$

3) 余位能驻值原理

$$\delta\Pi^* = \frac{\partial\Pi^*}{\partial T}\delta T = \frac{\partial V^*}{\partial T}\delta T = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V^*}{\partial T} = 0 \quad \Rightarrow \frac{Tl}{EA} - \frac{(P-T)l}{2EA\cos^3\theta} = 0$$

——结构的变形连续条件

解之得：$T = \dfrac{P}{1+2\cos^3\theta}$

余位能驻值原理的计算方法是力法

2、应力能原理（线性体系卡氏第二定理）

设外力的虚变化：$\delta P_1, \delta P_2, \delta P_3 \cdots$，则虚余功：

$$\delta W^* = \sum_i \delta P_i \cdot \Delta_i = \Delta_1 \delta P_1 + \Delta_2 \delta P_2 + \ldots$$

余能变分：$\delta V^* = \dfrac{\partial V^*}{\partial P_1} \delta P_1 + \dfrac{\partial V^*}{\partial P_2} \delta P_2 + \ldots$

$$\delta V^* = \delta W^*$$

$$\left(\frac{\partial V^*}{\partial P_1} - \Delta_1\right)\delta P_1 + \left(\frac{\partial V^*}{\partial P_2} - \Delta_2\right)\delta P_2 + \ldots = 0 \xrightarrow{\delta P_i \neq 0}$$

$$\boxed{\therefore \frac{\partial V^*}{\partial P_i} = \Delta_i \qquad i = 1, 2, 3 \ldots}$$

—应力能原理（恩格塞尔定理）

它代表了结构的变形协调条件，可用来建立力法方程。

讨论：

（1）、若结构中仅有力P_k发生虚变化，而其它的力保持不变，则：$\dfrac{\partial V^*}{\partial P_k} = \Delta_k$

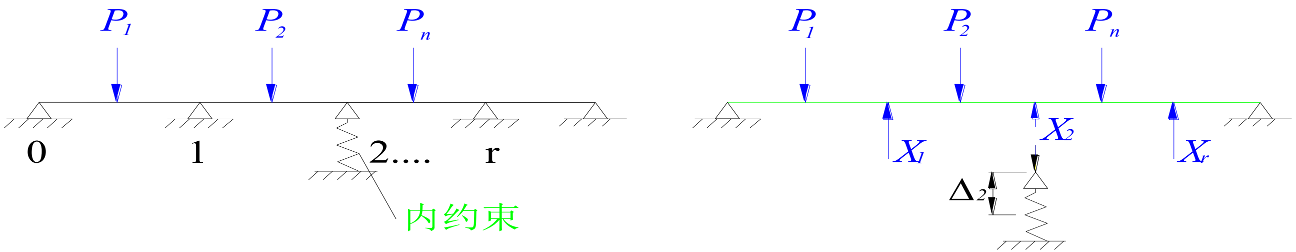
——结构余能对某一广义力的偏导数等于相应此力的广义位移。

对线性体系 $V^* = V$

$$\boxed{\therefore \frac{\partial V}{\partial P_k} = \Delta_k}$$ ——卡氏（第二）定理

在线性体系中，结构的应变能对某一广义力的偏导数等于相应此力的广义位移。

(2)、最小余位能定理（线性体系最小功原理）



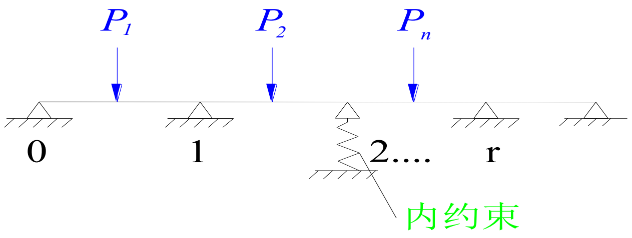
内约束：X_2处为弹性支座

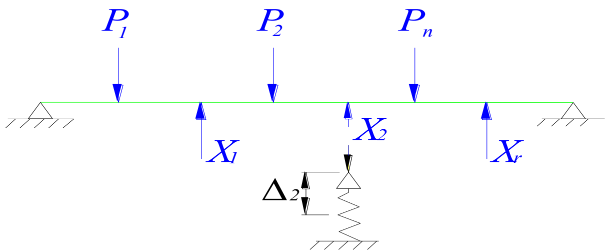
外约束：其余的约束为外约束

多余约束力 $X_1, X_2, X_3, \ldots X_r$

对外约束处有：$$\frac{\partial V^*}{\partial X_i} = \Delta_i = 0 \qquad i = 1,3,4\ldots\ldots,r$$

(2)、最小余位能定理





对内约束处：

- 若设 V_1^* 为梁的余能，V_2^*为弹性支座的余能，则：

$$\frac{\partial V_1^*}{\partial X_2} = -\Delta_2 \qquad \frac{\partial V_2^*}{\partial X_2} = \Delta_2$$

$$V^* = V_1^* + V_2^* \Rightarrow \frac{\partial V^*}{\partial X_2} = \frac{\partial V_1^*}{\partial X_2} + \frac{\partial V_2^*}{\partial X_2} = -\Delta_2 + \Delta_2 = 0$$

内约束、外约束处均有：

$$\frac{\partial V^*}{\partial X_i}=0 \qquad i=1,2,\ldots r$$

- ——最小余能定理：

结构余能对多余约束力的偏导数等于0。

它表明稳定平衡静定结构中，当外约束处的位移为0及内约束处位移协调时，多余约束反力使结构的余能为最小值。

对线性体系 $V^{*}=V$

最小余能定理 $\boxed{\Rightarrow \dfrac{\partial V}{\partial X_i}=0}$ ——最小功原理

线性体系中，结构的应变能（表达为力的函数）对约束反力的偏导数等于0。

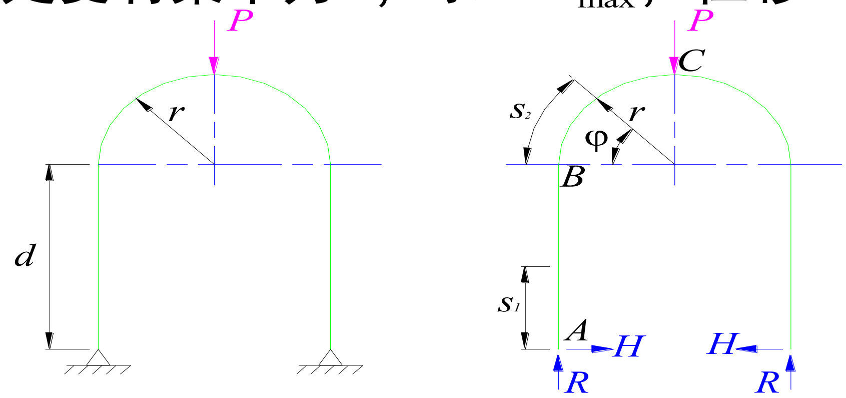
它给出了线性结构在平衡时多余约束力（支座反力或静不定内力）使应变能达到最小值。

思考：如何求静不定结构某点位移?

先用最小功原理，求多余约束力，转化成静定结构，再用卡氏定理求某点位移。

例1： 计算图示轴隧扶柱，扶柱下端设为自由支持，并在中心线处受有集中力P，求 M_{max}，位移 Δ_P。

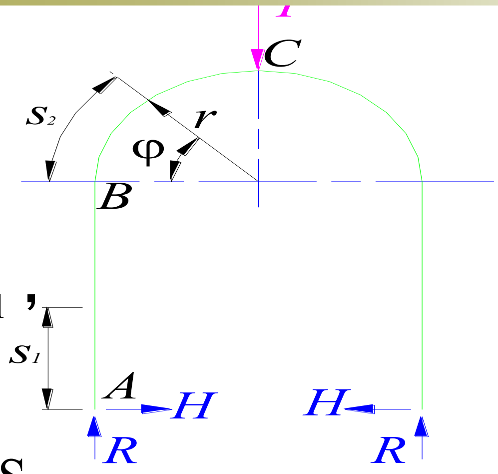
分析：



一次静不定，多余约束为H

（1）、先由最小功原理求多余约束力 $\boldsymbol{H}$

（2）、用卡氏定理求位移 Δ_P



(1）、先由最小功原理求多余约束力 H

$$\frac{\partial V}{\partial H}=\int\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial H}dS=0$$

AB段（直线部分），坐标由A点向上S_1，

$$M(S_1)=H\cdot S_1 \quad\Rightarrow\frac{\partial M(S_1)}{\partial H}=S_1$$

BC段（曲线部分），坐标由B点向上S_2

$$M(S_2)=H(d+r\sin\varphi)-Rr(1-\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial M(S_2)}{\partial H}=d+r\sin\varphi$$

$$\therefore\frac{\partial V}{\partial H}=\frac{2}{EI}\left\{\int_0^d HS_1\cdot S_1dS_1+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[H(d+r\sin\varphi)-\frac{P}{2}r(1-\cos\varphi)\right]\right.$$

$$\left.(d+r\sin\varphi)\cdot rd\varphi\right\}=0$$

若：$d=2r$，则解得：$H=\dfrac{6\pi-9}{80+27\pi}P=0.0598P$

则可求刚架各断面的弯矩，其中：

$$M_{\max}\big|_{\varphi=\pi/2}=H(d+r)-\frac{P}{2}r=3\times0.0598P\cdot r-0.5P\cdot r$$
$$=-0.321P\cdot r$$

（2）、用卡氏定理求位移 Δ_P

AB段： $M(S_1)=0.06PS_1 \Rightarrow \dfrac{\partial M(S_1)}{\partial P}=0.06S_1$

BC段：$M(S_2)=0.06P\cdot r(2+\sin\varphi)-0.5P\cdot r(1-\cos\varphi)$

$$\frac{\partial M(S_2)}{\partial P}=0.06r(2+\sin\varphi)-0.5r(1-\cos\varphi)$$

$$\therefore \Delta_P = \frac{\partial V}{\partial P} = 2\left(\int_0^{2r} \frac{M(S_1)}{EI}\frac{\partial M(S_1)}{\partial P} dS_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M(S_2)}{EI}\frac{\partial M(S_2)}{\partial P} r d\varphi\right.$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

$$= 0.08\frac{P \cdot r^3}{EI}$$

复习：本章所有内容

作业：P133 6.12

— 谢谢！ —