第九章 矩形板的弯曲理论

重点难点内容：

- ❑ 板的筒形弯曲（刚性板、柔性板）；
- ❑ 刚性板弯曲的三角级数求解；

本堂课内容：

复 习：

- □ 筒 形板的横弯曲；
- □ 筒形板的复杂弯曲；

- ➢ 刚性板的弯曲微分方程式；
- ➢ 板的边界条件；

简形板的分类（按弯曲问题）：

1、刚性板——中面力对弯曲要素可以忽略不计的板。

当小挠度变形（$w_{max}/t < \frac{1}{5}$）或由外加中面力但 $u \le 0.5$时均为刚性板；

2、柔性板——中面力对弯曲要素的影响不可忽略的板。

外加中面力的小挠度板但 $u > 0.5$ 或无外加中面力但 $w_{max}/t > \frac{1}{5}$ 均为柔性板；

3、薄膜——板的中面力远大于弯曲应力，板主要靠中面拉力承载。

思考题：

1、刚性板、柔性板与简形板的区别与联系？

2、简形板的求解思路可以应用到刚性板分析中？

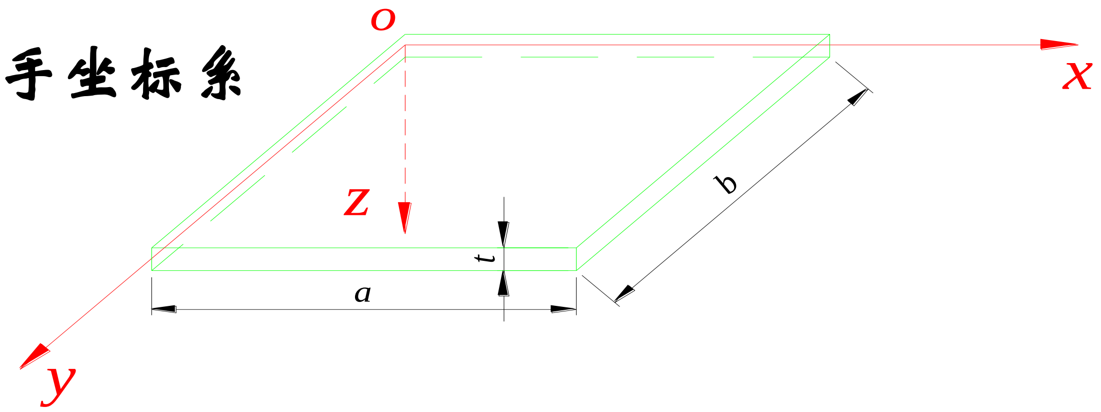
§9-3 刚性板的弯曲微分方程式

刚性板——中面力对弯曲要素可以忽略不计的板。

当小挠度变形（$w_{max}/t < \frac{1}{5}$）或由外加中面力但$u \le 0.5$时

均为刚性板；

坐标系——如图所示右手坐标系



一、基本假定：

1、直法线假定： 板变形前垂直于中面的法线在变形后仍为直线，并且变形前在中面法线上的点在变形后距中面的距离不变。

$$\Rightarrow \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \varepsilon_Z = 0$$

2、应力假定： 板在Z方向的正应力与其它应力分量相比可以忽略不计；$\sigma_z = 0$

3、不计板中面的变形

二、弯曲微分方程式

回顾： 单跨梁弯曲微分方程式的推导思路：

平面假定 → 几何关系 $\varepsilon = -yv''$ → 物理方程 $\sigma = -Eyv''$

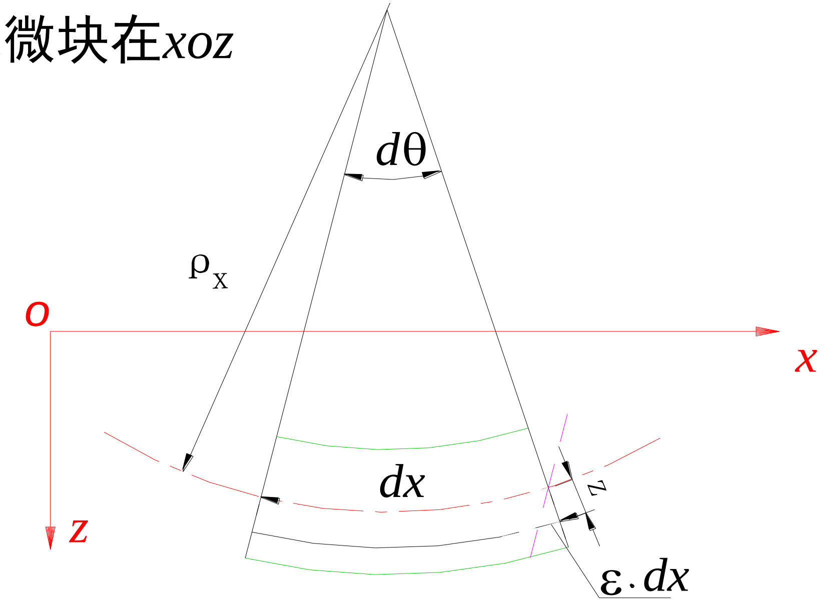
$\xrightarrow{\text{积分、应力合成}}$ $\boxed{M = EIv''}$

$\boxed{\text{平衡方程：}\dfrac{dM}{dx} = N, \dfrac{dN}{dx} = q}$

$\Rightarrow$ 平衡方程 $EIv^{(4)} = q(x)$

1、几何关系(几何方程)

$dxdy$微块，由直法线假定此微块在xoz平面内的变形如图：



$$\boxed{\varepsilon_x = -\frac{z}{\rho_x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}$$

$$\boxed{\varepsilon_y = -\frac{z}{\rho_y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon_x = \partial u/\partial x,\ \varepsilon_y = \partial v/\partial y} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -z\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{cases} \xrightarrow{\text{积分}} \begin{cases} u = -z\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z\dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

几何关系矩阵形式 $\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=-z\begin{Bmatrix}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix}$ 或 $\{\varepsilon\}=z\{\chi\}$

$\{\chi\}$

2、应力与应变之间的关系（物理方程）

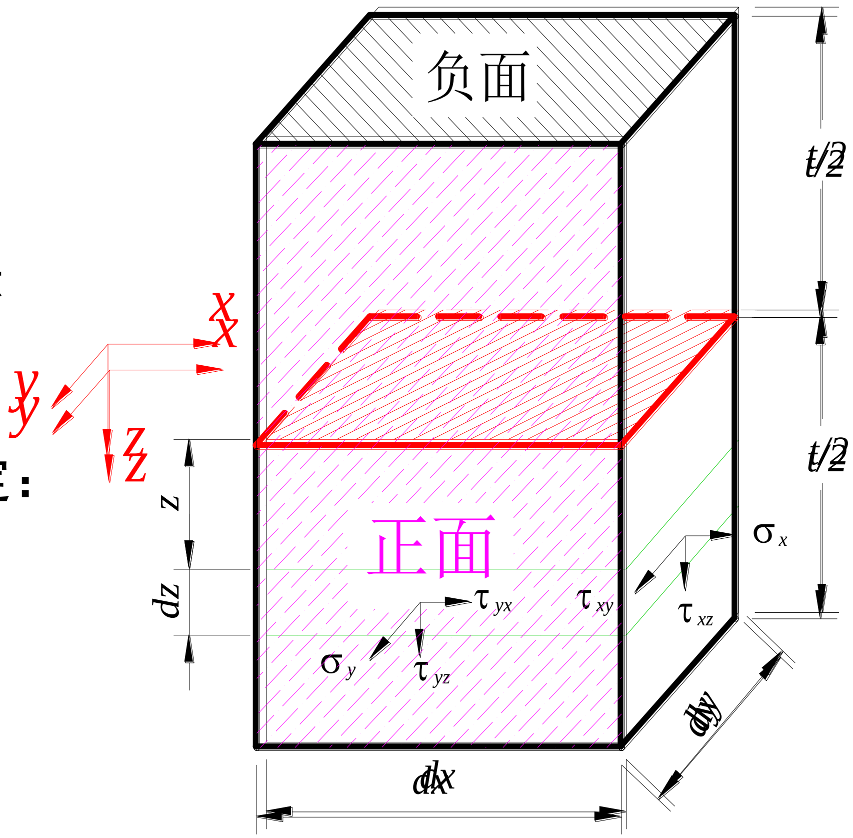
物理方程

$$\begin{cases}\sigma_x=\dfrac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)\\ \sigma_y=\dfrac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)\\ \tau_{xy}=G\gamma_{xy}=\dfrac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}\end{cases}\xrightarrow{\text{几何方程}}\begin{cases}\sigma_x=-\dfrac{E}{1-\mu^2}(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2})\\ \sigma_y=-\dfrac{E}{1-\mu^2}(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2})\\ \tau_{xy}=-\dfrac{Ez}{1+\mu}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{cases}$$

3、板单位宽度断面上的力和力矩：

τ_{xz}

- z —— 力的方向
- x —— 力作用面的法线方向



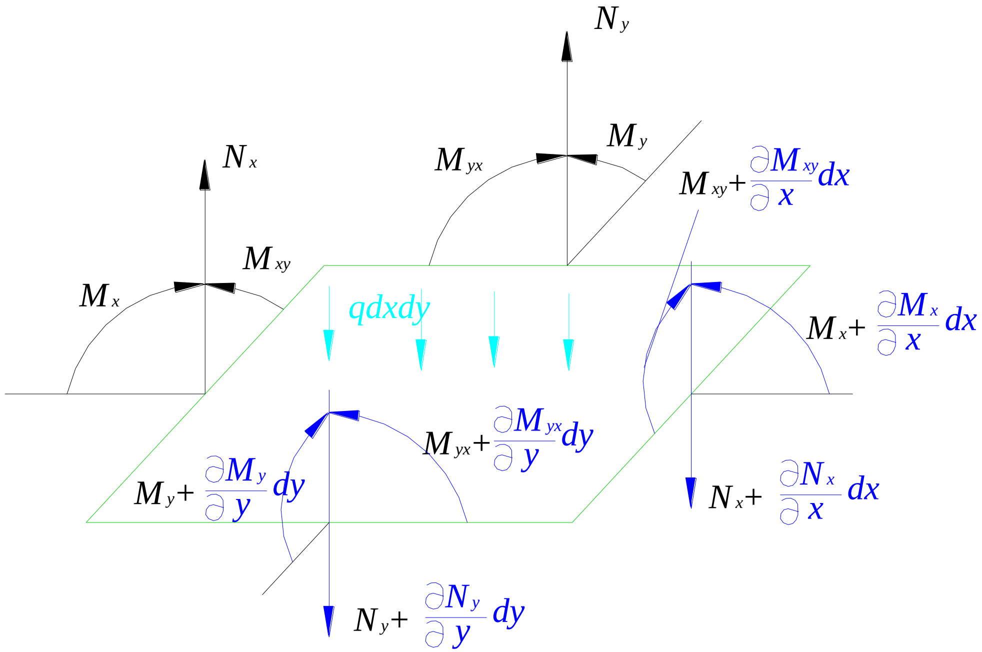
（a）应力分量正负规定：

正面正向为正；

负面负向为正；

其它为负。

(b) 断面上的力和力矩正负规定：



弯矩： M_x, M_y 使得板的横截面上z>0的一侧产生正号的 σ_x, σ_y 时为正。

扭矩： M_{xy}, M_{yx}使得板的横截面上z>0的一侧产生正号的 τ_{xy}, τ_{yx} 时为正。

剪力： Q_x, Q_y 使得板的横截面上产生正号的 τ_{xz}, τ_{yz} 时为正。

(c) 板单位宽度断面上的力和力矩：

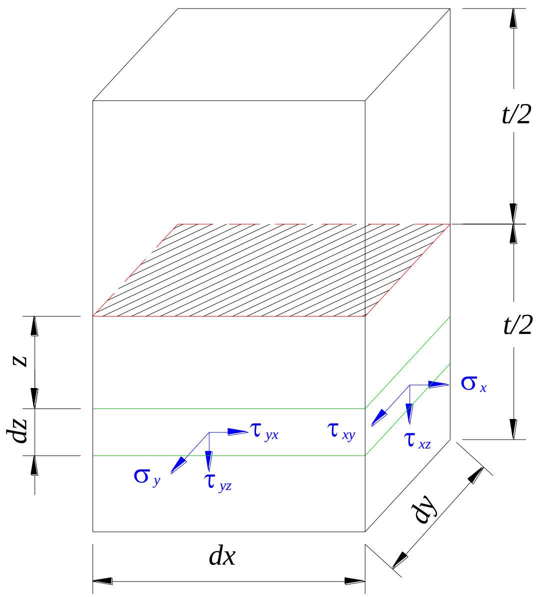
正应力 σ_x 可以用静力上相当的作用于中面的合力和合力矩代替；合力为0。

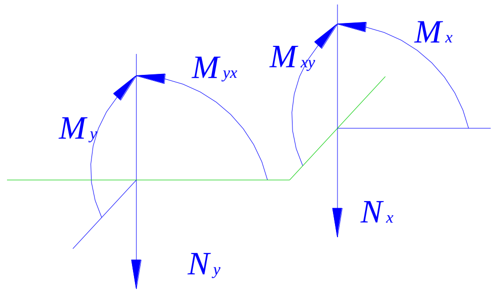
单位宽度上的合力矩：

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z \cdot dz$$

❖ σ_y 在垂直于y轴的断面中单位宽度的弯矩 为：

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z \cdot dz$$





❖**剪应力** τ_{xy}、τ_{yx}用作用在中面单位宽度上的合力矩代替：

$$M_{xy}=\int_{-t/2}^{t/2}\tau_{xy}zdz$$

$$M_{yx}=\int_{-t/2}^{t/2}\tau_{yx}zdz$$

$$\xrightarrow{\tau_{xy}=\tau_{yx}} M_{xy}=M_{yx}$$

❖**剪应力** τ_{xz}、τ_{yz} 用作用在中面单位宽度上的合力代替：

$$N_x=\int_{-t/2}^{t/2}\tau_{xz}dz,\ N_y=\int_{-t/2}^{t/2}\tau_{yz}dz$$

物理方程代入 ➡

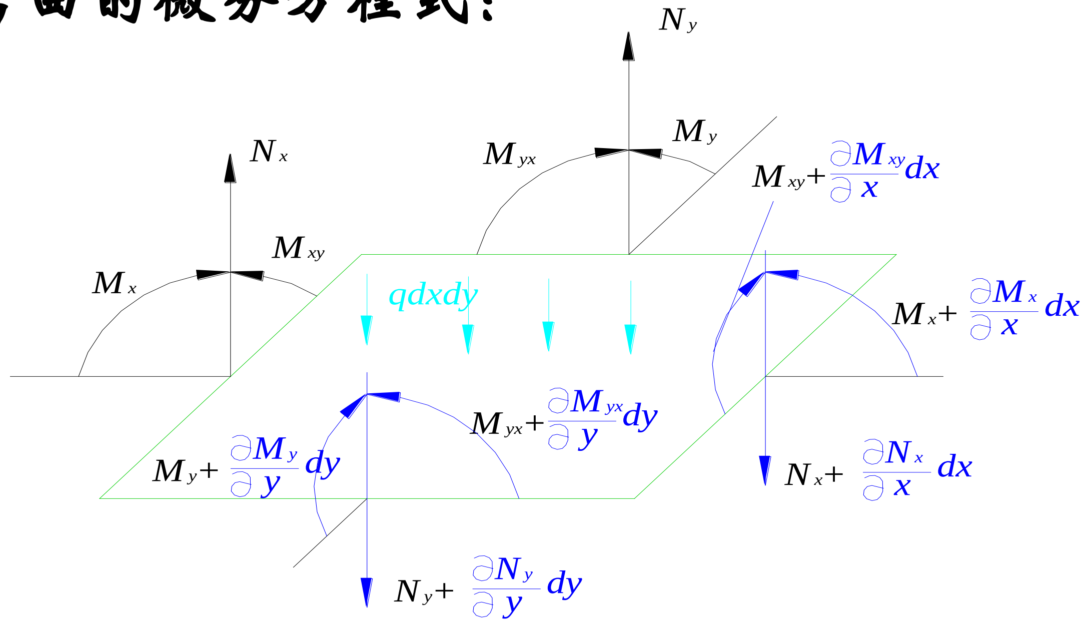
$$\begin{cases} M_x=-D(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \\ M_y=-D(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \\ M_{xy}=-D(1-\mu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \end{cases}$$

矩阵表示：$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \dfrac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\mu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -(1-\mu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$

$$= \boxed{-\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}} \boxed{\begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \{M\} = [D]\{\chi\}$$

4、静力平衡条件，板弯曲的微分方程式：



- 对y轴求矩等于0

$$\sum M_y(F)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cdots + \cdots \frac{\partial M_x}{\partial x}dx)dy \cdots + \cdots + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}dy)dx - (N_x + \cdots)dxdy \\ + \cdots \cdots \cdots \cdots = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum M_x(F)=0 \Rightarrow \frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=N_x \\
&\sum M_x(F)=0 \Rightarrow \frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=N_y \\
&\sum F_z=0 \Rightarrow \frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=-q(x,y)
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}
N_x&=-D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right) \\
N_y&=-D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right)
\end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=-q(x,y)\xrightarrow{M\sim w(x,y)}$$

$$\boxed{D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q(x,y)}$$

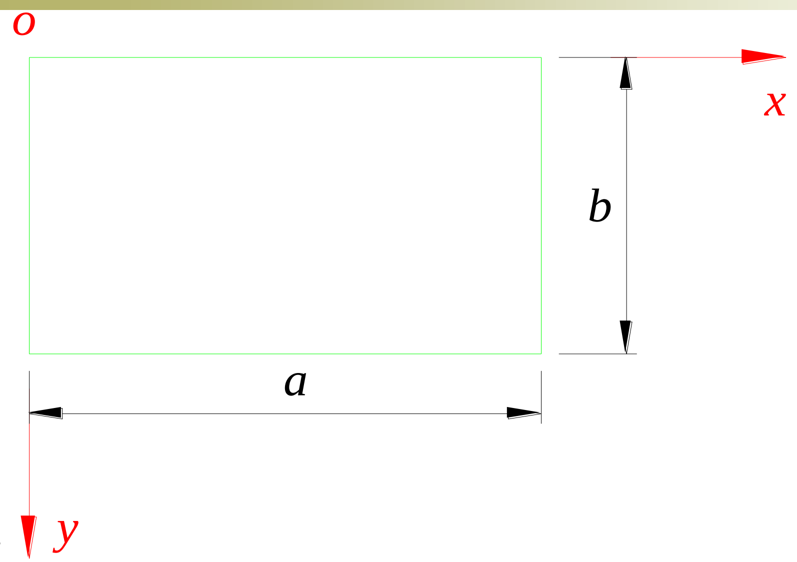
——刚性板一般弯曲的平衡微分方程

刚性板的弯曲的平衡微分方程：

$$D\nabla^2\nabla^2 w = q(x,y)$$

$$\nabla^2\nabla^2(\qquad) = \frac{\partial^4(\qquad)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4(\qquad)}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4(\qquad)}{\partial^4 y}$$

三、边界条件



■ 板自由支持在刚性周界上

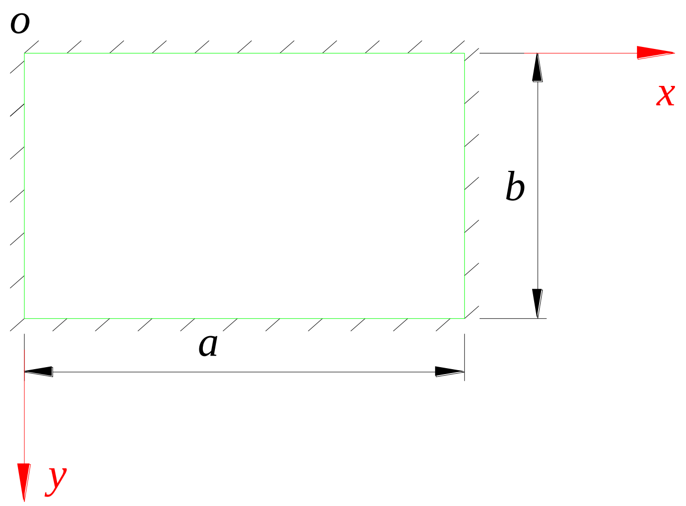
$x=0$或$x=a$处：

$$w=0, M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0}\begin{cases} x=0, x=a\text{处，}\quad w=0, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \\ y=0, y=b\text{处，}\quad w=0, \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \end{cases}$$

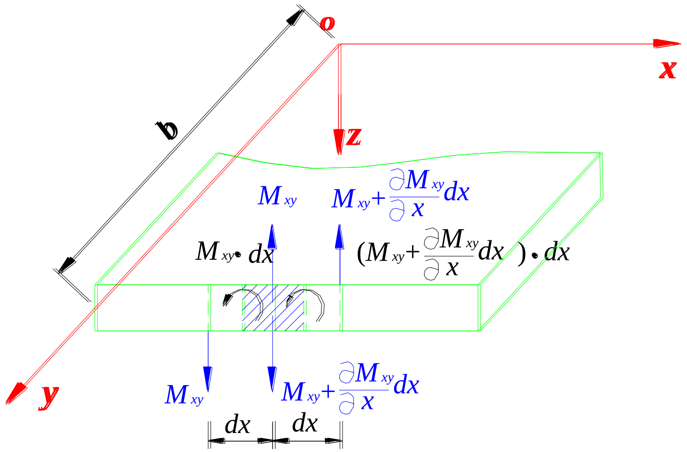
■ 板刚性固定在刚性周界上

$$\begin{cases} x=0, x=a\text{处，} \quad w=0, \dfrac{\partial w}{\partial x}=0 \\ y=0, y=b\text{处，} \quad w=0, \dfrac{\partial w}{\partial y}=0 \end{cases}$$



■板的边缘为自由边：

$$y=b\text{边为自由边}\Rightarrow\begin{cases}M_y=0\\N_y=0\\M_{xy}=0\end{cases}$$



相互之间独立吗？

将剪力与扭矩都为零的条件转化成一等效剪力为零的条件

扭矩简化成剪力后，两个区域的中线之间的无限小微段dx上

只有垂向力作用，垂向力的大小为：$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dx$

板边总的垂向力为：$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dx+N_y dx$

作用在单为宽度上的总的垂向力为 ：

$$r = N_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

$$\Rightarrow r_y = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right]$$

$y=b$ 自由边的边界条件：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \end{cases}$$

小结：

- ❖刚性板的弯曲微分方程式 的推导；
- ❖板的边界条件

- 复习：P205-211
- 预习：9.4节
- 作业：9.7