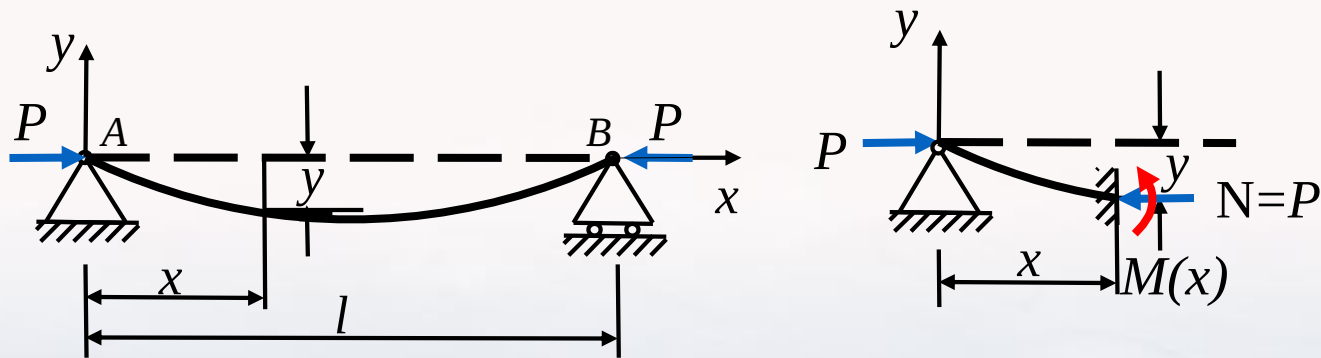


# 细长压杆的临界载荷



# 压杆稳定的基本概念

## 压杆失稳的过程的力学分析

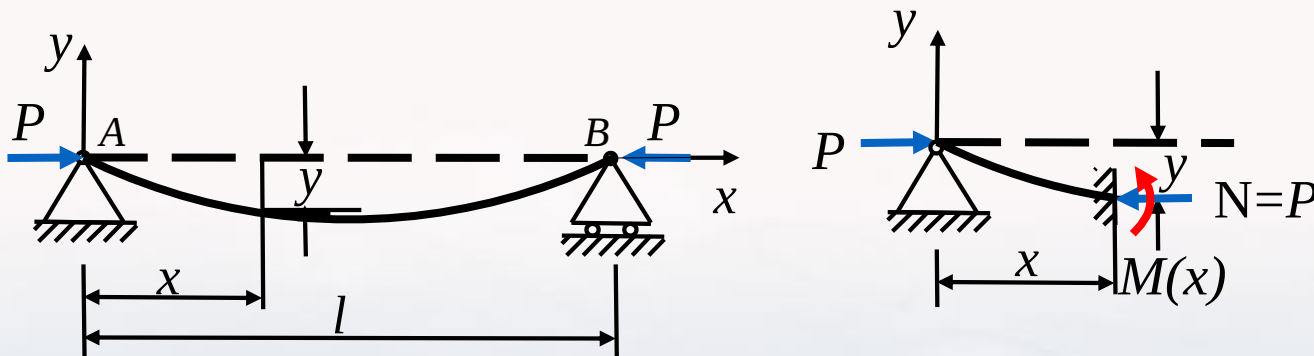


- 1、当 $|P \cdot y| < |M(x)|$ 时，是稳定平衡。
- 2、当 $|P \cdot y| > |M(x)|$ 时，是不稳定平衡。
- 3、当 $|P_{cr} \cdot y| = |M(x)|$ 时，杆处于临界状态。



# 细长压杆临界载荷的欧拉公式

## 一、两端铰支细长压杆的临界力



$$\begin{aligned} M(x) &= -P_{cr} \cdot y \\ M(x) &= EJy'' \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad EJy'' = -P_{cr} \cdot y \quad \longrightarrow \quad EJy'' + P_{cr} \cdot y = 0$$

$$\text{令 } k^2 = \frac{P_{cr}}{EJ} \quad \text{则, } y'' + k^2 y = 0$$



# 细长压杆临界载荷的欧拉公式

$$y'' + k^2 y = 0$$

这个方程的通解为：

$$y = a \sin kx + b \cos kx \quad (a)$$

由于压杆两端的约束都是铰链，

$$(1) \text{ 在 } x = 0 \text{ 处, } y = 0$$

$$(2) \text{ 在 } x = l \text{ 处, } y = 0$$

将(1)式代入(a)式，得 $b=0$ ，

$$\text{于是}(a)\text{式可以改写为, } y = a \sin kx \quad (b)$$

$$\text{将}(2)\text{式代入}(b)\text{式, 得 } a \cdot \sin kl = 0 \quad (c)$$



# 细长压杆临界载荷的欧拉公式

$$a \cdot \sin kl = 0 \quad (C)$$

由(C)式可知， $a$ 或 $\sin kl = 0$ 。

若 $a = 0$ ，则压杆轴线上各点的挠度均等于零，这表明杆件没有弯曲。这与压在微弯状态下保持平衡的前提矛盾。

因此只能，

$$\sin kl = 0$$

满足这一条件的 $kl$  值应为，

$$kl = n\pi \quad n=0, 1, 2 \cdots \text{的任意整数}$$



# 细长压杆临界载荷的欧拉公式

$$kl = n\pi, \quad n=0, 1, 2\cdots\text{的任意整数}$$



$$k = \frac{n\pi}{l}$$



$$k^2 = \frac{P_{cr}}{EJ}$$

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}$$

如果 $n = 0$ ，即得 $P_{cr} = 0$ ，则杆不受力，这不是我们所需要的解。

从工程的观点看，不为零的最小临界力才有意义。所以， $n=1$



# 细长压杆临界载荷的欧拉公式

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

临界力 $P_{cr}$ 与杆的抗弯刚度 $EJ$ 成正比，与杆长 $l$ 的平方成反比。

欧拉公式



# 细长压杆临界载荷的欧拉公式

## 二、其它支座下压杆的临界力

| 支 座<br>情 况 | 一端自由<br>一端固定                                                                      | 两端铰支                                                                               | 一端铰支<br>一端固定                                                                        | 两端固定                                                                                |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 简<br>图     |  |  |  |  |
| $\mu$      | 2                                                                                 | 1                                                                                  | 0.7                                                                                 | 0.5                                                                                 |
| 临界<br>压力   | $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}$                                                | $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$                                                    | $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(0.7l)^2}$                                                | $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(0.5l)^2}$                                                |

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(ul)^2}$$

